فهرس الإرسال الأول

فهرس السلسلة الأولى

تحتوي هذه السلسلة على درس واحد هو :

مفاهيم عامة

الهدف من الدرس :

مراجعة بعض المبادئ في المنطق والعلاقات والعمليات الداخلية الواردة في برنامج السنتين الأولى والثانية ثانوي.

المدة اللازمة لدراسة : 12 ساعة.

الدروس التي ينبغي الرجوع إليها :

1 – المنطق الرياضي.

2 – المجموعات والعمليات عليها.

3 – حل المعادلات وجمل المعادلات في مجموعات مختلفة

المراجع الخاصة بهذا الدرس :

كتاب الرياضيات 3 ث/ع + ر المعهد التربوي الوطني

تصميم الدرس

تمهيد :

إذا كانت س فاصلة النقطة ب وَ ع ترتيب النقطة ب فإننا نرمز إلى إحداثيي هذه النقطة (س ، ع) ونقول أن الزوج (س ، ع) يمثل النقطة ب في المستوي حيث نسمي س الإحداثي الأول وَ ع الإحداثي الثاني. إن للزوج (س ، ع) مفهوم يختلف عن مفهوم كل من س وَ ع وأن هذا المفهوم يختلف تبعا للترتيب الذي نعطيه للعددين س، ع فالنقطة التي يمثلها الزوج (س ، ع) تختلف بصورة عامة عن النقطة التي يمثلها الزوج (ع ، س)

تعريف:

إن الزوج المرتب (س ، ع) هو كائن رياضي مؤلف من عنصرين س، ع مأخوذين بهذا الترتيب. نسمي س المركبة الأولى للزوج المرتب، كما نسمي المركبة الثانية لهذا الزوج المرتب.

* إذا كان أ ≠ ب فإن (أ ، ب) ≠ (ب، أ).
* (أ ، ب) = (حـ ، د) ⇔ أ = حـ وَ ب = د.
* (أ ، ب) ≠ (حـ، د) ⇔ أ ≠ جـ أو ب ≠ د.

مثال :

$(\sqrt{3}$ ، 1$)$ = (س ، ع) $\Leftrightarrow$ س = $\sqrt{3}$ وَ ع = 1

الجداء الديكارتي :

الجداء الديكارتي لمجموعتين :

لتكن المجموعتان **س** ، **ع** حيث **س** ={ 1 ، 4 ، 7 } ، **ع** = { 0 ، 3 } . إذا شكّلنا جميع الأزواج المرتبة التي تنتمي المركبة الأولى لكل منها إلى المجموعة الأولى **س** وتنتمي المركبة الثانية لكل منها إلى المجموعة الثانية **ع** نحصل على المجموعة { (1 ، 0) ، (1 ، 3) ،(4 ،0) ،(4 ، 3) ، (7 ، 0) ،(7 ، 3) }.

تعريف :

الجداء الديكارتي لمجموعتين **س** ، **ع** ويرمز له : **س** × **ع** هو مجموعة الأزواج المرتبة التي تنتمي المركبة الأولى لكل منها إلى المجموعة **س** وتنتمي المركبة الثانية لكل منها إلى المجموعة ع.

أي **س** × **ع** = { (أ ، ب) / أ ∈ س وَ ب ∈ ع

تمثيل الجداء الديكارتي :

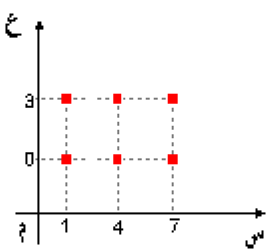
- **التمثيل الجدولي :** يُمثل الجداء الديكارتي **س** × **ع** بجدول ذي مدخلين كما هو مبيّن في الشكل :

ع \ س	1	4	7
0	(1 ، 0)	(4 ، 0)	(7 ، 0)
3	(1 ، 3)	(4 ، 3)	(7 ، 3)

- **التمثيل البياني :**

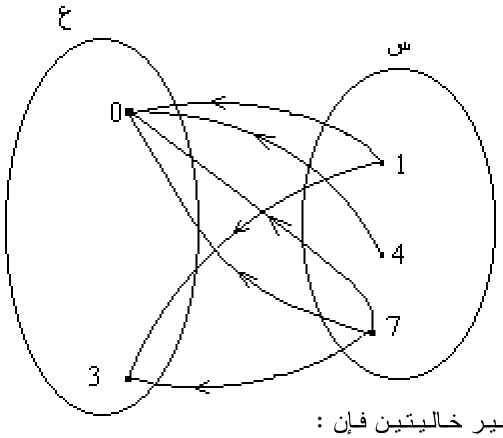
يُمثل الجداء الديكارتي في هذا النوع من التمثيل بمجموعة نقط من المستوي كما هو مبيّن في الشكل .

فالنقطة التي تمثل الزوج المرتب (س ، ع) هي نقطة تقاطع الخط العمودي الذي ينطلق من س والخط الأفقي الذي ينطلق من ع.



• **التمثيل السَّهمي :**

في هذا النوع من التمثيل تُمثل المجموعتان **س** وَ **ع** بمخططيهما لفين كما هو مبيّن في الشكل، ويُمثل كل زوج مرتب (س ، ع) من (**س** × **ع**) بسهم ينطلق من **س** ويصل إلى ع



خواص الجداء الديكارتي :

• إذا كانت المجموعتان **س** وَ **ع** غير خاليتين فإن :

س × **ع** ≠ **ع** × **س** ⇔ **س** ≠ **ع** وَ **س** × **ع** = **ع** × **س** ⇔ **س** = **ع**

• إذا كان عدد عناصر **س** هو ن وعدد عناصر المجموعة **ع** هو نَ فإن عدد عناصر المجموعة **س**× **ع** هو ن × نَ

• الجداء الديكارتي للمجموعات **س** ، **ع** ، **ص** بهذا الترتيب هو المجموعة التي نرمز إليها بالرمز **س** × **ع** × **ص** و المعرفة كما يلي :

س × **ع** × **ص** = { (أ ، ب ، جـ) / أ ∋ **س** وَ ب ∋ **ع** وَ جـ ∋ **ص** }

1 - العلاقات :

1 – 1 العلاقة الثنائية :

1 – 1 – 1 مثال :

لتكن المجموعتان **س** = { 2 ، 3 ، 4 ، 5 } وَ **ص** = { 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، 11 } و لنأخذ كل الأزواج المرتبة (س ، ع) من **س**× **ص** التي يكون من أجلها "س يُقسّم ع " نلاحظ أن الأزواج التي تحقق هذا الشرط هي عناصر المجموعة التالية :

{ (2 ، 6) ، (2 ، 8) ، (3 ، 6) ، (3 ، 9) (4 ، 8) }

نقول عن العبارة : "... يُقسم ... " أنها تعرّف علاقة ثنائية من المجموعة **س** نحو المجموعة **ص** ونسمي **س** مجموعة البدء وَ **ص** مجموعة الوصول.

1 – 2 : تعريف :

تكون علاقة ثنائية " معرفة " إذا أعطيت مجموعتان **س** وَ **ص** و خاصية (أو عبارة) تحققها أزواج مرتبة من **س** × **ص**. يرمز عادة إلى علاقة ثنائية ما بحرف مثل ع .
وإذا كان الزوج المرتب (س ، ع) يحقق العلاقة ع نكتب : س ع ص.

1 – 3 – بيان العلاقة :

هو مجموعة الأزواج (س، ع) التي تحقق العلاقة ع ونرمز له بالرمز : **ب**ع .

1 – 3 – 1 مثال :

لتكن المجموعتان **س** = { 1 ، 2 ، 3 } ، **ص** = { – 2 ، 0 ، 3 ، 4 } والعلاقة ع من **س** نحو **ص** المعرفة كما يلي :

(∀ س ∈ **س**) وَ(∀ ع ∈ **ص**) : س ع ع ⟺ س < ع.

لدينا : 1 ع 3 ، 1 ع 4 ، 2 ع 3 ، 2 ع 4 ، 3 ع 4.

بيان العلاقة ع هو :

بع = { (1 ، 3) ، (1 ، 4) ، (2 ، 3) ، (2 ، 4) ، (3 ، 4) }

1 – 3 – 2 : مثال :

لتكن العلاقة ع المعرفة من ط نحو ص كما يلي :

∀ س ∈ ط ،∀ ع ∈ ص ، س ع ع ⟺ س = 2 ع.

بع = { (س ، ع) / س = 2 ع وَ س ∈ ط و ع ∈ ص }

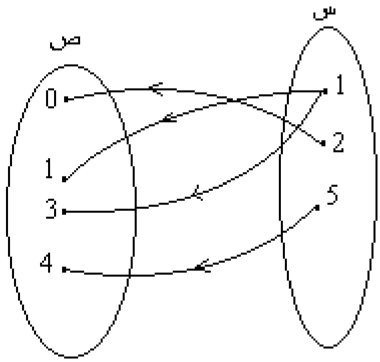
= { (2 ع ، ع) / ع ∈ ط }

1 – 4 – تمثيل العلاقة الثنائية :

لتكن ع علاقة معرفة من **س** = { 1 ، 2 ، 5 }

نحو **ص** = { 0 ، 1 ، 3 ، 4 } وبيانها **ب**ع = { (1 ، 1) ، (1 ، 3) ، (2 ، 0) ، (5 ، 4) }

تمثل سهميا هذه العلاقة كما في الشكل التالي :



1 – 5 : العلاقة العكسية :

ع علاقة ثنائية من **س** نحو **ص**. العلاقة العكسية للعلاقة الثنائية ع هي العلاقة الثنائية $ع^{-1}$ من **ص** نحو **س** والمعرفة كما يلي : أ ع ب ⇔ ب $ع^{-1}$ أ

1 – 5 – 1 مثال :

لتكن المجموعتان **س** = { 1 ، 2 ، 5 } وَ **ص** ={ 1 ، 4 ، 6 } ولنعرف العلاقة ع من **س** نحو **ص** كما يلي :

∀ س ∈ **س** ، ∀ ع ∈ **ص** : س ع ع ⇔ س ≤ ع . إذن :

ب$_ع$ = { (1 ، 1) ، (1 ، 4) ، (1 ، 6) ، (2 ، 4) ، (2 ،6) ، (5 ، 6) }

والعلاقة العكسية $ع^{-1}$ هي علاقة معرفة من **ص** نحو **س** بيانها هو :

ب$_{ع^{-1}}$ = { (1، 1) ،(4 ، 1) ، (6 ، 1) ، (4 ، 2) (6 ، 2) ، (6 ، 5) }.

1 – 6 : العلاقة في مجموعة واحدة :

يمكن تعريف علاقة ثنائية ع من المجموعة **س** نحو المجموعة **س** نفسها نقول في هذه الحالة أننا عرفنا علاقة في المجموعة بيانها هو مجموعة جزئية من المجموعة : **س** × **س**.

(نرمز للمجموعة **س**× **س** بالرمز **س**^{2} وندعوها المربع الديكارتي للمجموعة **س**)

1 – 6 – 1 مثال :

ع علاقة ثنائية معرفة في **س** = { 3 ، 5 ، 12 ، 27 } كما يلي :

∀ (س ، ع) ∈ س^2 : ك ∈ ط : س = ك ع.

ب$_ع$ = { (3 ، 3) ، (12 ، 3) ، (27 ، 3) ، (5 ، 5) ، (12 ، 12) ، (27 ، 27) }

1 – 7 خواص العلاقة في مجموعة :

تتميز العلاقة في مجموعة بخواص لا تتمتع بها العلاقة بين عناصر مجموعتين

مختلفتين وهي :

1 – 7 –1 – خاصية الإنعكاس :

لتكن **س** مجموعة غير خالية، نقول عن العلاقةع المعرفة في **س** أنها إنعكاسية إذا وفقط إذا كان :

$$\forall\ أ \in س : أ\ ع\ أ$$

1 – 7 – 1 – 1 : مثال :

علاقة " .... يقسم.......... " في المجموعة ط* إنعكاسية لأنه : $\forall$ أ $\in$ ط* : س يقسم س.

1 – 7 – 1 – 2 – مثال :

العلاقة ع المعرفة في ط كما يلي :

$\forall$(س ، ع)$\in$ ط^2: س ع ع $\Leftrightarrow$ س = 2 ع ليست انعكاسية لأن :

س $\in$ ط* س $\neq$ 2 س .

1 – 7 – 2 – خاصية التناظر :

لتكن **س** مجموعة غير خالية، نقول عن علاقة ع معرفة في **س** أنها تناظرية إذا وفقط إذا كان :

$$\forall(أ ، ب) \in س^2 : أ\ ع\ ب \Leftarrow ب\ ع\ أ .$$

1 – 7 – 2 – 1 : مثال :

علاقة التوازي المعرفة في مجموعة مستقيمات مستو تناظرية لأن : إذا كان $(ق_1)$ ،$(ق_2)$مستقيمين من هذه المجموعة وكان $(ق_1)$ //$(ق_2)$ فإن $(ق_2)$ //$(ق_1)$.

1 – 7 – 2 – 2 : مثال :

في المجموعةط العلاقةع المعرفة كما يلي:

$\forall$(س ، ع)$\in$ ط^2: س ع ع $\Leftrightarrow$ س = 2 ع ليست تناظرية.

1 – 7 – 3 : خاصية ضد التناظر :

نقول عن علاقةع معرفة في مجموعة **س** أنها ضد تناظرية إذا وفقط إذا كان :

$$\forall(أ ، ب) \in س^2 : (أ\ ع\ ب)\ وَ\ (ب\ ع\ أ) \Leftarrow أ = ب$$

1 – 7 – 3 – 1 مثال :

إن علاقة الاحتواء ($\supseteq$) علاقة ضد تناظرية في مجموعة أجزاء مجموعة إذ أنه : إذا كان

(س⊇ص وَ ص ⊇ س) فإن **س = ص**.

1 – 7 – 3 – 2 : مثـال :

إن الـعـلاقـة "…. ≥ ….." الـمـعـرفـة فـي الـمـجـمـوعـةط هـي عـلاقـة ضـد تـنـاظريـة لأنه : إذا كان : (س≥ ص وَ ص ≥ س) فإن س = ص.

1 – 7 – 4 : خـاصـيـة الـتـعدي :

نـقـول عـن علاقـةع في مـجـمـوعـة **س** أنـها مـتـعدية إذا وفقط إذا كـان :

$$(\forall ا \ni س)،(\forall ب \ni س)،(\forall \text{ جـ} \ni س): \left\{ \begin{array}{l} ا\ ع\ ب \\ ب\ ع\ \text{حـ} \end{array} \right. \Leftarrow ا\ ع\ \text{جـ}$$

1 – 7 – 4 – 1 : مثـال :

عـلاقـة " ….. ≥ …. " الـمـعـرفـة فـي مـجـمـوعـة الأعـداد الـطـبـيـعـيـة مـتـعـديـة لأن : س ≥ ع وَ ع ≥ ص ⇐ س ≥ ص.

1 – 8 عـلاقـة الـتـكـافؤ :

1 – 8 – 1 تـعـريـف :

نـقـول عـن عـلاقـةع مـعـرفة فـي مجـمـوعـة **س** غير خالية أنـهـا عـلاقة تكـافؤ إذا وفقط إذا كـانت إنـعـكـاسـيـة وتـناظرية ومـتـعديـة.

1 – 8 – 2 مثـال :

لـتكـن **ق** مـجـمـوعـة مـستـقـيـمـات الـمـسـتـوي وَع عـلاقـة مـعـرفـة فـي **ق** كـمـا يـلـي :

$$\forall(\Delta_1) \ni ق ،\forall(\Delta_2) \ni ق :(\Delta_1)\ ع\ (\Delta_2) \Leftrightarrow (\Delta_1)=(\Delta_2) \text{أو} (\Delta_1)\cap(\Delta_2)=\varnothing$$

أي (Δ_1) يـوازي (Δ_2). بـرهـن أنع هـي عـلاقـة تـكـافؤ.

الـحـل :

* خـاصـيـة الإنـعـكـاس : ∀ (Δ) ∍ **ق** ، (Δ) = (Δ) أي (Δ) // (Δ) إذن (Δ) ع (Δ) أيع إنـعـكـاسـيـة.

* خـاصـيـة الـتـنـاظر: ((Δ_1) ∀ ∍ **ق**) ، ((Δ_2) ∀ ∍ **ق**):

$$[(\Delta_2)\ ع\ (\Delta_1)] \Leftrightarrow [(\Delta_2)=(\Delta_1) \text{ أو } (\Delta_1) \cap (\Delta_2) =\varnothing]$$

$$\Leftarrow [(\Delta_2)=(\Delta_1) \text{ أو } (\Delta_2) \cap (\Delta_1) =\varnothing]$$

إذن : $(\Delta_2)\ ع\ (\Delta_1)$ و بـتـالـيع تـنـاظـريـة .

* خاصية التعدي : $((\Delta_1)\ \forall$ ∋ ق) ، $((\Delta_2)\ \forall$ ∋ ق)، $((\Delta_3)\ \forall$ ∋ ق) :

$$\left.\begin{array}{c} (\Delta_1)\,\mathcal{R}\,(\Delta_2) \\ \text{وَ} \\ (\Delta_2)\,\mathcal{R}\,(\Delta_1) \end{array}\right\} \Leftarrow \left\{\begin{array}{c} (\Delta_1)=(\Delta_2)\text{أو}(\Delta_1)\cap(\Delta_2)=\varnothing \\ \text{وَ} \\ (\Delta_2)=(\Delta_3)\text{أو}(\Delta_2)\cap(\Delta_3)=\varnothing \end{array}\right.$$

نميز أربع حالات هي :

* $((\Delta_2)=(\Delta_1)$ وَ $(\Delta_2)\ =\ (\Delta_1)\ \Leftarrow (\Delta_3) = (\Delta_3)$ إذن $(\Delta_1)\ \mathcal{R}\ (\Delta_3)$

* $((\Delta_2)=(\Delta_1)$ وَ $(\Delta_2)\quad (\Delta_3) \cap =\varnothing \quad \cap(\Delta_1) \Leftarrow (\Delta_3)\ =\varnothing$

إذن $(\Delta_1)\ \mathcal{R}\ (\Delta_3)$ لأن $(\Delta_2)=(\Delta_1)$ إذن $(\Delta_1)\ \mathcal{R}\ (\Delta_3)$

*$(\Delta_2)\cap(\Delta_1)\ =\varnothing$ وَ$(\Delta_2)\ (\Delta_3)=(\Delta_3)\ \cap\ (\Delta_1)\Leftarrow\ =\varnothing$

لأن $(\Delta_2)\ =\ (\Delta_3)$ أذن $(\Delta_3)\mathcal{R}(\Delta_1)$

* $(\Delta_1)\ \cap\ (\Delta_2) = \varnothing$ § $(\Delta_2)\ \cap\ (\Delta_3) =\varnothing$ لنبرهن أن :

$(\Delta_1) = (\Delta_3)$ أو $(\Delta_1) \cap (\Delta_3) = \varnothing$

لدينا : $(\Delta_1) \cap (\Delta_3) \neq \varnothing \Leftarrow E$ ن / ن ∋ (Δ_1) وَن ∋ (Δ_3)

$\Leftarrow (\Delta_1) = (\Delta_3)$

(لأن : $(\Delta_1)//(\Delta_2)$ وَ $(\Delta_3)\ //\ (\Delta_2)$ و نعلم أنه يوجد مستقيم وحيد يشمل النقطة ن ويوازي المستقيم (Δ_2)).

إذ ن : $(\Delta_3)\mathcal{R}(\Delta_1)$ وبالتالي $\mathcal{R}$ متعدية إذن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ في **ق**

1 – 9 – أصناف التكافؤ :

1 . 9 . 1 تعريف :

لتكن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ في المجموعة **س** وليكن أ عنصرًا كيفيا من **س،** نسمي صنف تكافؤ أ المجموعة الجزئية من **س** التي تتكون من العناصر المرتبطة بالعنصر أ وفق العلاقة $\mathcal{R}$ ويرمز لها بالرمز $\bar{أ}$ يسمى العنصر أ ممثلاً لهذا الصنف. $\bar{أ}$ = { س ∋ **س** /أ $\mathcal{R}$ س }

1 . 9 . 2 خواص أصناف التكافؤ :

• كل صنف تكافؤ في مجموعة غير خالية لأنها على الأقل تشمل ممثل الصنف.

- أصناف التكافؤ منفصلة مثنى مثنى.
- إتحاد أصناف التكافؤ هو المجموعة الكلية **س**.

1 . 9 . 3 مجموعة حاصل القسمة :

لتكنع علاقة تكافؤ في مجموعة **س** غير خالية. نُسمي مجموعة أصناف تكافؤ العلاقةع مجموعة حاصل قسمة **س** وفقع و نرمز لها برمز : **س**/ع.

1 – 10 علاقة الترتيب :

1 . 10 . 1 تعريف :

نقول عن علاقة معرفة في مجموعة غير خالية **س** أنها علاقة ترتيب إذا وفقط إذا كانت : إنعكاسية وَ ضد تناظرية وَ متعدية.

1 . 10 . 2 مثال :

إن العلاقة "....≥ .... " المعرفة في **ط** هي علاقة ترتيب لأنها إنعكاسية وضد تناظرية ومتعدية .

بالإضافة إلى هذه الخواص تتمتع العلاقة "....≥ .... " بالخاصية التالية :

∀ (س ، ع) ∋ **ط** ^{2} : س ≥ ع أو ع ≥ س.

تسمى هذه العلاقة التي تحقق هذا الشرط علاقة ترتيب كلي :

1 – 10 – 3 تعريف :

إذا كانتع علاقة ترتيب في المجموعة **س** فإنها تكون علاقة ترتيب كلي إذا تحقق الشرط التالي :

(∀ أ ∋ **س**) ، (∀ ب∋ **س**) : أع ب أو ب ع أ.

و في خلاف ذلك نقول أن الترتيب جزئيا.

1 . 10 . 3 . 1 مثال :

ع علاقة معرفة في **ط*** كما يلي :

∀ أ ∋ **ط*** ، ∀ ب ∋ **ط*** : أع ب ⇔ E ك ∋ **ط*** : أ = ك ب

برهن أنع علاقة ترتيب في **ط***

الحل :

* خاصية الإنعكاس : (∀ أ ∋ **ط***) : أ = 1 × أ أيأع أ و بالتالي ع إنعكاسية

* خاصية ضد التناظر :

(∀ أ ∋ ط*) ، (∀ب ∋ ط*) : أ ع ب وَ ب ع أ ⇐ أ = ب.

أ ع ب | ك ∋ ط* : أ = ك ب
وَ ⇐ | وَ
ب ع أ | كَ ∋ ط* : ب = كَ أ

وبضرب المساواتين طرفا لطرف ينتج : (أ ب) = ك كَ (أ ب)

وبما أن أ ب ≠ 0 يكون ك كَ = 1 و بالتالي : ك = كَ = 1 و منه أ = ب إذن ع علاقة ضد تناظرية .

* خاصية التعدي :

(∀ أ ∋ ط*) ، (∀ ب ∋ ط*) ،(∀ جـ ∋ ط*) :

أ ع ب | ك ∋ ط* : أ = ك ب (1)
وَ ⇐ | وَ
ب ع جـ | كَ ∋ ط* : ب = كَ جـ (2)

و بضرب المساوتين (1) وَ (2) طرفًا لطرف ينتج : أ ب = ك كَ ب جـ و منه أ = ك كَ جـ (لأن ب ≠ 0)أ ي أع جـ. إذنع متعدية و منهع علاقة ترتيب ط*

1 – 11 – المجموعة المحدودة من الأعلى :

1 . 11 . 1 : تعريف :

لتكن **س** مجموعة غير خالية مزودة بعلاقة ترتيب (≤) ولتكن **ص** مجموعة جزئية من **س**.
نقول عن العنصرأ من **س** أنه حادٌّ من الأعلى للمجموعة **ص** إذا كان :∀ ب ∋ **ص** : ب≤ أ
وعندئذ نقول أن المجموعة **ص** محدودة من الأعلى.

1 . 11 . 1 . 1 مثال :

لتكن المجموعة **س** = { 0 ، 1 ، 4 ، 5 ، 7 ، 9 ، 10 ، 12 } المزودة بالعلاقة ≤ ولتكن مجموعتها الجزئية ص = { 0 ، 1 ، 4 ، 9 }

نلاحظ أن : 9 حاد من الأعلى لِ : **ص**

10 حاد من الأعلى لِ **ص** ، 12 حاد من الأعلى لِ **ص**

نلاحظ أن 9 أكبر عنصر في **ص**.

ملاحظة :

المجموعة التي تقبل عنصرًا أكبراً تكون محدودة من الأعلى. العكس غير صحيح لأنه يمكن أن تكون المجموعة محدودة من الأعلى دون أن تقبل عنصراً أكبراً.

1.- 12 المجموعة المحدودة من الأسفل :

1 . 12 . 1 تعريف :

لتكن المجموعة **س** غير الخالية والمزودة بعلاقة ترتيب (≥) ولتكن **ص** مجموعة جزئية من **س**. نقول عن العنصر أ من **س** أنه حاد من الأسفل للمجموعة **ص** إذا كان :∀ ب ∈ **ص** : أ ≥ ب. عندئذ نقول أن المجموعة **ص** محدودة من الأسفل.

1 . 12 . 2 مثال :

لتكن المجموعة : **س** = { 2 ، 4 ، 5 ، 7 ، 8 ، 9 ،11 ، 13 } المزودة بالعلاقة ≥ ولتكن مجموعتها الجزئية **ص** = { 5 ، 7 ، 8 ، 9 ، 11 }

نلاحظ أن : 2 حاد من الأسفل لِ **ص**، 5 حاد من الأسفل لِ **ص**

4 حاد من الأسفل لِ **ص**، 5 هو أصغر عنصر من **ص**.

2 - الدوال والتطبيقات :

درسنا سابقا العلاقات وسنهتم فيما يلي بنوع خاص من العلاقات يدعى التطبيقات.

2 - 1 الدوال :

2 - 1 - 1 تعريف :

نسمي دالة من المجموعة **س** في المجموعة **ع** كل علاقة من **س** نحو **ع** ترفق بكل عنصر من **س** عنصرًا على الأكثر من **ع** .

نرمز إلى الدالة بأحد الرموز : تا ، ها ، لا، ....

و نكتب تا : **س** ← **ع**

س ↤ تا (س)

ملاحظة : الدالة هي تا بينما تا (س) هو صورة العنصر س بالدالة تا.

2 . 1 . 2 مجموعة تعريف الدالة :

مجموعة تعريف الدالة تا هي مجموعة عناصر المجموعة **س** التي لها صورة في **ع** بالدالة تا.

مثال :

تا دالة من ح في ح حيث $تا(س) = \frac{س - 6}{س^2 - 25}$

تكون تا معرفة إذا كان : $س^2 - 25 \neq 0$ أي $س \neq 5$ و $س \neq -5$.

نرمز لمجموعة التعريف بالرمز ف ونكتب :

$ف = ح - \{5 ، -5\} =]-\infty ، -5[\cup]-5 ، 5[\cup]5 ، +\infty[$

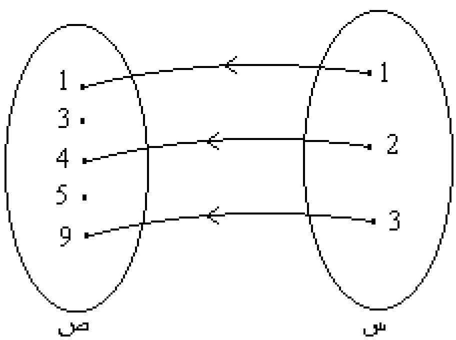
2 . 2 : التطبيقات :

2 . 2 . 1 مثال :

إذا كانت **س** = { 1 ، 2 ، 3 } ، **ص** = { 1 ، 3 ، 4 ، 5 ، 9 } والعلاقة ع المعرفة كما يلي :

∀ س ∈ **س** ، ∀ ع ∈ **ص** : س ع ع ⟺ $س^2 = ع$.

يبيّن هذا الشكل المخطط السهمي للعلاقة ع .



2 . 2 . 2 تعريف :

نقول عن علاقة ع من مجموعة **س** نحو مجموعة **ص** أنها تطبيق للمجموعة **س** في المجموعة **ص** إذا وفقط إذا أرفقت بكل عنصر من **س** عنصرًا وحيدًا من **ص**، ويُرمز للتطبيق بأحد الرموز تا ، ها ، لا . . .

2 . 2 . 3 مثال :

لتكن الدالة تا من ح في ح المعرفة كما يلي: $تا(س) = \frac{2س+1}{س-5}$

هل تا تطبيق ؟

الحل :

نلاحظ أن العنصر 5 ليس له صورة بواسطة تا وبالتالي فإن تا ليست تطبيقًا من ح في ح. و لكن نلاحظ أن تا تطبيق من ح –{ – 5 } نحو ح

ملاحظة :

التطبيق هو دالة معرفة في مجموعة تعريفها.

2 . 3 أنواع التطبيقات :

ليكن تا تطبيق من المجموعة **س** نحو المجموعة **ع**

2 . 3 . 1 التطبيق المطابق :

التطبيق المطابق في المجموعة **س** هو التطبيق للمجموعة **س** في نفسها الذي يرفق بكل عنصر س من **س** العنصر س نفسه ونرمز له بالرمز $I_س$ / ∀ س ∍ **س** : $I_س$ (س) = س

*** خاصية :**

تا تطبيق للمجموعة **س** في المجموعة **ع**

∀ س ∍ **س** : (تا $I_س$) (س) = تا [$I_س$ (س)] = تا (س)

إذن : تا o $I_س$ = تا ، $I_س$ oتا = تا.

2 – 3 – 2 التطبيق الغامر :

نقول عن تطبيق تا للمجموعة **س** في المجموعة **ع** أنه تطبيق غامر إذا وفقط إذا كانت لكل عنصر من المجموعة **ع** سابقة على الأقل في **س**.

أي : (تا غامر) ⇔ (∀ ع ∍ **ع** ، E س ∍ **س** : تا (س) = ع).

ملاحظة :

يكون تا تطبيقًا غير غامر إذا وجد على الأقل عنصر من **ع** ليس له سابقة في **س** أي :

(E ع ∍ **ع** ، ∀ س ∍ **س** : ع ≠ تا(س).

2 – 3 – 2 – 1 مثال : ليكن التطبيق تا المعرف كما يلي :

تا : ح– { 1 } ⟵ ح

س ⟼ تا (س) = $\frac{2س-5}{س-1}$. هل تا غامر ؟

الحل :

(تا غامر) ⇔ (∀ ع ∋ ح ، E س ∋ ح - :{1-} / تا (س) = ع).

ليكن ع عنصرًا من ح

ع = تا (س) ⇔ ع = $\frac{2س-5}{س-1}$ ⇔ ع (س − 1) = 2 س − 5.

⇔ ع س − ع = 2 س − 5.

⇔ ع س − 2 س = ع − 5

⇔ س (ع − 2) = ع − 5 .

*من أجل ع ≠ 2 فإن س (ع − 2) = ع − 5 ⇔ س = $\frac{ع-5}{ع-2}$

*من أجل ع = 2 لا يمكن تعيين س . أي العنصر 2 ليست له سابقة بالتطبيق تا إذن تا ليس غامرًا.

2 – 3 – 3 : التطبيق المتباين :

نقول عن التطبيق تا للمجموعة **س** في المجموعة **ع** أنه متباين إذا وفقط إذا كانت لكل عنصر من **ع** سابقة على الأكثر في **س** بالتطبيق تا.

أي : (تا متباين)⇔ [∀(س$_1$ ، س$_2$)∋ **س**^{2} : تا(س$_1$) = تا(س$_2$) ⇐ **س**$_1$= س$_2$].

يمكن أن نعطي صيغة أخرى للتعريف و هي :

(تا متباين) ⇔ [∀(س$_1$ ، س$_2$)∋ **س**^{2} ⇐ س$_1$ ≠ س$_2$ تا (س$_1$) ≠ تا (س$_2$)].

نتيجة : يكون تا متباينًا إذا كان للمعادلة ع = تا(س) حل في المجموعة **س** على الأكثر و ذلك من أجل كل عنصر ع من **ع**.

* متى نقول عن تطبيق تا من **س** نحو **ع** أنه غير متباين ؟

يكون تطبيقا غير متباين إذا وجد عنصران متمايزان من **س** لهما نفس الصورة في **ع**.

2 – 3 – 3 – 1 مثال :

ليكن تا التطبيق المعرف كما يلي :

تا : ح -{ 1 } ⟵ ح

س ⟼ تا (س) = $\frac{2س - 5}{س - 1}$. هل تا متباين ؟

الحل :

(تا متباين) $\Leftrightarrow$ ($\forall$ (س$_1$ ، س$_2$) $\in$ (ح $-\{1\}$)^2 : تا(س$_1$) $=$ تا(س$_2$) $\Leftarrow$ س$_1$ $=$ س$_2$)

مهما يكن س$_1$ و س$_2$ من ح $-\{1\}$ لدينا :

تا (س$_1$) = تا (س$_2$) $\Leftarrow$ $\frac{2\text{ س}_1-5}{\text{س}_1-1} = \frac{2\text{س}_2-5}{\text{س}_2-1}$.

$\Leftarrow$ (2 س$_1-5$) (س$_2-1$) $=$ (2س$_2-5$)(س$_1-1$)

$\Leftarrow$ 2 س$_1$س$_2$ $-$2س$_1$ $-$5س$_2$ $+5$ $=$ 2س$_2$س$_1$ $-$2س$_2$ $-$5س$_1$ $+5$

$\Leftarrow$ 3 س$_1$$=$3 س$_2$

$\Leftarrow$ س$_1$$=$ س$_2$ إذن تا متباين.

2 – 3 – 4 التطبيق التقابلي :

نقول عن التطبيق تا للمجموعة **س** في المجموعة **ع** أنه تطبيق تقابلي إذا وفقط إذا كان لكل عنصر من **ع** سابقة وحيدة من **س** يكون تا تقابلاً إذا كان للمعادلة تا(س) = ع حلا وحيداً في **س** من أجل كل ع من **ع**.

نتيجة :

تا تقابلي إذا وفقط إذا كان تا متباينًا وغامرًا.

2 – 3 – 5 التطبيق العكسي لتقابل :

تا تطبيق تقابلي للمجموعة **س** في المجموعة **ع**. بما أن كل عنصر ع من **ع** له سابقة وحيدة س في **س** بالتطبيق تا فإن العلاقة العكسية للعلاقة تا ترفق بكل عنصر ع من **ع** عنصرًا وحيدًا س من **س** فهي إذن تطبيق.

نسمي هذا التطبيق التطبيق العكسي للتقابل تا ونرمز له بالرمز تا$^{-1}$

إذن تا$^{-1}$ تطبيق للمجموعة **ع** في المجموعة **س**.

س $\in$ **س** ، ع $\in$ **ع** : ع = تا (س) $\Leftrightarrow$ س= تا$^{-1}$ (ع).

نتائج :

* التطبيق العكسي لتقابل هو تقابل.

* تا$^{-1}$ o تا = $I_{\text{س}}$.

* تا o تا$^{-1}$ = $I_{\text{ع}}$.

2 – 3 – 6 التطبيق المركب :

لنعتبر ثلاث مجموعات ليست خالية **س** ، **ع** ، **ص** وليكن التطبيق تا للمجموعة **س** في المجموعة **ع**، التطبيق ها للمجموعة **ع** في المجموعة **ص**.

تا :**س** ← **ع** وَ ها : **ع** ← **ص**.

ليكن س عنصرًا من **س** وَ ع صورة س بالتطبيق تا . إذن ع = تا (س).

ع عنصر من **ع** . لتكن ص صورة ع بالتطبيق ها.

إذن ص = ها (ع) = ها [تا (س)].

فإذا أرفقنا بكل عنصر س من **س** العنصر ص من **ص** حسب ما ورد سابقا نكون قد عرّفنا تطبيقا جديدًا للمجموعة **س** في المجموعة **ص**.

2 – 3 – 6 – 1 تعريف :

يسمى التطبيق السابق عا مركب التطبيقين تا وَ ها بهذا الترتيب ونكتب عا = هاo تا ونقرأ : "عا يساوي تا تركيب ها " .

∀ س ∍ **س** ، عا (س) = (هاo تا) (س) = ها [تا (س)]

2 – 3 – 7 : تركيب تطبيقين متباينين :

2 – 3 – 7 نظرية :

لتكن **س** ، **ع** ، **ص** ثلاث مجموعات وليكن تا تباينا للمجموعة **س** في المجموعة **ع** وليكن ها تباينا للمجموعة **ع** في المجموعة **ص**.

التطبيق المركب هاo تا هو تباين للمجموعة **س** في المجموعة **ص**.

البرهان : ليكن س$_1$ و س$_2$ عنصرين من **س** ، ع$_1$ وَ ع$_2$ صورتيهما على الترتيب و فق تا، ص$_1$ وَ ص$_2$ صورتي ع$_1$ وَ ع$_2$ على الترتيب وفق ها لدينا :

س$_1$ $\xrightarrow{\text{تا}}$ ع$_1$، ع$_1$ $\xrightarrow{\text{ها}}$ ص$_1$، س$_2$ $\xrightarrow{\text{تا}}$ ع$_2$، ع$_2$ $\xrightarrow{\text{ها}}$ ص$_2$

التطبيق المركب هاo تا هو الذي يرفق بالعنصرين س$_1$ وَ س$_2$ على التوالي ص$_1$ وَ ص$_2$.

س$_1$ $\xrightarrow{\text{ها تا}}$ ص$_1$، س$_2$ $\xrightarrow{\text{ها تا}}$ ص$_2$.

لدينا (ص$_1$ = ص$_2$) ⇔ ها(ع$_1$) = ها (ع$_2$).

التطبيق ها متباين إذن : ها (ع$_1$) = ها (ع$_2$) ⇐ ع$_1$=ع$_2$

لدينا (ع$_1$=ع$_2$) ⇔ تا (س$_1$) = تا(س$_2$)

والتطبيق تا متباين إذن : تا $\left(س_1\right) =$ تا$\left(س_2\right) \Leftarrow$ س$_1$=س$_2$

ينتج مما سبق أن (هاo تا) $\left(س_1\right) =$ (هاo تا) $\left(س_2\right) \Leftarrow$ س$_1$=س$_2$

إذن التطبيق هاo تا هو تباين للمجموعة **س** في المجموعة **ص**.

2 – 3 – 8 تركيب تطبيقين غامرين :

نظريـة :

لتكن المجموعات **س** ، **ع** ، **ص** والتطبيق الغامر تا للمجموعة **س** في المجموعة **ع** والتطبيق الغامر ها للمجموعة **ع** في المجموعة **ص**. التطبيق هاo تا هو تطبيق غامر للمجموعة **س** في المجموعة **ص**.

البرهان :

يجب أن نبرهن أنه من أجل كل عنصر ص من **ص**، يوجد على الأقل عنصر س من **س** بحيث يكون ك (هاo تا) (س) = ص.

لنعتبر عنصرًا ص من **ص**، التطبيق ها غامر فرضا، إذن يوجد على الأقل عنصر ع من **ع** بحيث يكون ها (ع) = ص.

التطبيق تا غامر، إذن يوجد على الأقل عنصر س من **س** بحيث يكون تا (س) = ع .

لدينا إذن (ها o تا) (س) = ص.

فالتطبيق هاo تا تطبيق غامر للمجموعة **س** في المجموعة **ص**.

2 – 4 – إقتصار وإمتداد تطبيق :

2 – 4 – 1 إقتصار تطبيق :

تا تطبيق للمجموعة **س** في المجموعة **ع** ، **سَ** مجموعة جزئية من المجموعة **س** نسمي إقتصار التطبيق تا على المجموعة **سَ** التطبيق **تا**$_1$ المعرف من **سَ** في **ع** كما يلي :

$\forall$ س $\in$ **سَ** : **تا**$_1$ (س) = تا (س).

2 – 4 – 1 – 1 مثال :

تا : ح ← ح : تا (س) = 2 س.

تا : ط ← ح: **تا**$_1$ (س) = 2 س

تا$_1$: هو إقتصار التطبيق تا على المجموعة ط.

2 – 4 – 2 – إمتداد تطبيق :

تـا تـطـبـيق لـلـمـجـمـوعـة **س** في الـمـجـمـوعـة **ع**.

ص مـجـمـوعـة تـحـوي **س** نـقـول عـن الـتـطـبـيـق $تا_2$ لـلـمـجـمـوعـة **ص** فـي **ع** أنـه إمـتـداد للـتـطـبـيـق تـا إذا وفـقـط إذا كـان إقـتـصـار $تا_2$ عـلـى **س** هـو الـتـطـبـيـق تـا أي :

$\forall$ س $\in$ **س** : $تا_2$ (س) = تـا (س).

2 – 4 – 2 – 1 – مثـال :

تا : ط ← ج : تا(س) = س + 1.

$تا_1$: ص ← ج : $تا_1$ (س) = س + 1

$تا_2$: ج ← ج : $تا_2$ (س) = س + 1.

$تا_1$ وَ $تا_2$ إمتدادان للتطبيق تا إلـى ص وَ إلـى ج عـلـى الـتـرتـيـب.

3 – الـعـمـلـيـات الـداخـلـيـة

3 – 1 الـعـمـلـيـة الـداخـلـيـة :

3 – 1 – 1 – تـعـريـف :

نـسـمـي عـمـلـيـة داخـلـيـة فـي مـجـمـوعـة مـج كـل تـطـبـيـق لـلـمـجـمـوعـة مـج × مـج فـي الـمـجـمـوعـة مـج.

أمثـلـة :

* الـجـمـع والـطـرح والـضـرب عـمـلـيـات داخـلـيـة فـي الـمـجـمـوعـة ج.

* الـطـرح عـمـلـيـة لـيـسـت داخـلـيـة فـي الـمـجـمـوعـة ط.

لأنـه يـوجـد عـلـى الأقـل عـددان طـبـيـعـيـان س ، ع بـحـيـث (س – ع) لا يـنـتـمـي إلـى ط.

3 – 2 : خـواص الـعـمـلـيـات الـداخـلـيـة :

3 – 2 – 1 – خـاصـيـة الـتـبـديـل :

* عـمـلـيـة داخـلـيـة فـي الـمـجـمـوعـة مـج.

تكون العملية * تبديلية في الـمجموعـة مـج إذ وفقط إذ تحقق ما يـلـي :

$\forall$ (س ، ع) $\in$ **مج**^{2} : س * ع = ع * س.

3 – 2 – 2 – خاصية التجميع :

*عملية داخلية في المجموعة مج

تكون العملية * تجميعية في مج إذ وفقط إذا تحقق ما يلي :

$\forall$ (س ، ع ، ص) $\in$ مج^3 : (س * ع) * ص = س * (ع * ص).

3 – 2 – 3 العنصر الحيادي :

*عملية داخلية في المجموعة مج

يكون العنصري من المجموعة مج عنصرًا حياديًا للعملية * إذ وفقط إذا تحقق ما يلي :

$\forall$ س $\in$ مج : س * ي = س وَ ي * س = س .

نظرية :

العنصر الحيادي إن وجد وحيد.

البرهان :

إذ فرضنا وجود عنصرين حياديين ي ، يَ للعملية * فإن

يَ * ي = ي * يَ = يَ (باعتبار ي عنصر حيادي).

يَ * ي = ي * يَ = ي (باعتبار يَ عنصر حيادي).

ينتج إذن : ي = يَ ، أي أن العنصر الحيادي وحيد.

3 – 2 – 4 نظير عنصر :

* عملية داخلية في المجموعة مج وتقبل عنصراً حياديًا ي. يكون العنصر سَ من مج نظيراً للعنصر س من مج بالنسبة للعملية * إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

س * سَ = ي وَ سَ * س = ي .(نقول عن س وَ سَ أنهما متناظران)

نظرية :

* عملية تجميعية في مجموعة مج. نظير عنصر في مج إن وجد وحيد.

البرهان :

ليكن سَ وَ سً نظيرين للعنصر س لدينا

(سَ * س) * سً = ي * سً وَ سَ * (س*سً) = سَ * ي = سَ إذن سَ = سً.

3 – 2 – 5 العنصر الماص :

* عملية داخلية في المجموعة مج .

يكون العنصر أ من مج عنصرًا ماصًا بالنسبة للعملية * إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

$\forall$س $\in$ **مج** : س *أ = أ وَ أ * س = أ

3 – 2 – 5 – 1 : مثال :

الصفر عنصر ماص في المجموعة ح المزودة بعملية الضرب لأن :$\forall$ س $\in$ ح ، س × 0 = 0 وَ 0 × س = 0

3 – 2 – 6 – العنصر الاعتيادي :

*عملية داخلية في المجموعة مج .

يكون العنصر أ من المجموعة مج إعتياديا بالنسبة إلى العملية * إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

$\forall$(س، ع)$\in$ **مج**^{2} : (أ *س =أ *ع) $\Leftarrow$ (س =ع) و (س * أ =ع * أ) $\Leftarrow$(س =ع)

3 – 2 – 7 – توزيع عملية على عملية أخرى :

لتكن * وَ Δ عمليتين داخليتين في مجموعة مج.

تكون العملية * توزيعية على العمليةΔ إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

$\forall$ (س، ع،ص) $\in$ **مج**^{3} :
- س *(ع Δ ص) =(س *ع) Δ(س *ص)
- وَ
- (ع Δ ص) * س= (ع *س) Δ(ص *س)

3 – 3 – البنى الجبرية :

نفرض * عملية داخلية في المجموعة مج (مج $\neq \phi$).

3 – 3 – 1 الزمرة :

تكون (مج ، *) زمرة إذا وفقط إذا تحققت كل الشروط الآتية :

- العملية * تجميعية.
- العملية * تقبل عنصرًا حياديا.
- كل عنصر من مج يقبل نظيرًا في مج بالنسبة إلى العملية *.

إذا كانت العملية * تبديلية نقول أن الزمرة (مج ، *) تبديلية أو آبلية.

3 – 3 – 1 – 1 مثال :

(ص ، +) زمرة تبديلية.

(ط ، +) ليست زمرة (لأنه ليس لكل عنصر نظير).

3 – 3 – 2 الحلقة :

* وَ Δ عمليتان داخليتان في المجموعة **ل**.

تكون (**ل** ، * ، Δ) حلقة إذا وفقط إذا تحققت كل الشروط الآتية.

- (**ل** ، *) زمرة تبديلية.
- العملية Δ تجميعية.
- العملية Δ توزيعية على العملية * .

إذا كانت Δ تبديلية نقول أن الحلقة (**ل**، * ، Δ) تبديلية.

إذا كانت Δ تقبل عنصرًا حياديًا نقول أن الحلقة (**ل** ، *،Δ) واحدية.

ملاحظة : يسمى العنصر الحيادي بالنسبة إلى العملية * (صفر الحلقة) في حين يسمى العنصر الحيادي بالنسبة للعمليةΔ عنصر الوحدة.

قواسم الصفر :

لتكن (مج ، + ، ×) حلقة. العنصر الحيادي بالنسبة لـِ + هو 0. نقول عن العنصرينأ وَ ب من مج أنهما قاسمين للصفر إذا كان : أ × ب = 0 وَ أ ≠ 0 وَ ب ≠ 0.

الحلقة التامة :

نقول عن الحلقة (مج، + ،×) أنها تامة إذ كانت لا تحتوي على قواسم للصفر.

3 – 3 – 4 الجسم :

ل مجموعة مزودة بعمليتين داخليتين * ،Δ . ليكن ي العنصر الحيادي للعملية * وَ **لَ** = **ل** – { ي } تكون (**ل** ، * ، Δ) جسمًا إذا وفقط إذ تحقق ما يلي :

- (**ل** ، * ، Δ) حلقة واحدية.
- المجموعة **لَ** غير خالية ولكل عنصر من **لَ** عنصر نظير بالنسبة إلى العمليةΔ.

إذا كانت العمليةΔ تبديلية نقول أن الجسم (**ل** ، * ، Δ) تبديلي.

أو إنه حقل.

3 – 4 – التشاكل :

3 – 4 – 1 - تعريف :

لتكن مج مجموعة غير خالية مزودة بعملية داخلية * ولتكن **ل** مجموعة غير خالية مزودة بعملية داخليةT. وليكن تا تطبيق من مج نحو **ل**.
نقول أن التطبيق تا تشاكل إذا تحقق ما يلي :

$$\forall\ (س_1 ، س_2) \ni مج \quad : \quad تا(س_1 * س_2) = تا\ (س_1) \quad T \quad تا\ (س_2)\ .$$

3 –4 – 1 – 1 مثال :

تا تطبيق معرف كما يلي :

تا : $(\underline{ط} ، +) \leftarrow (\underline{ط} ، \times)$: تا (س) = $2^{س}$

بين أن تا تشاكل .

الحل : يكون تا تشاكلا إذا كان :

$$\forall\ (س_1 ، س_2) \ni \underline{ط}^2 \ : \ تا(س_1 + س_2) = تا\ (س_1) \times تا(س_2)$$

$$تا(س_1 + س_2) = 2^{س_1 + س_2} = 2^{س_1} \times 2^{س_2}$$

$$تا(س_1 + س_2) = تا\ (س_1) \times تا\ (س_2)$$. إذن تا تشاكل

3 – 4 – 1 – 2 - مثال :

لتكن (مج ، o) زمرة تبديلية، س عنصر من مج . نرمز لِ سoس بالرّمز $س^2$

وليكن φ تطبيقا معرفا كما يلي :

φ : مج ← مج : φ (س) = $س^2$ برهن أن φ تشاكل .

الحل :

$$\forall\ (س_1 ، س_2) \ni مج^2 : \varphi(س_1 \ o\ س_2) = (س_1 \ o\ س_2)^2$$

$$= (س_1 \ o\ س_2) \ o\ (س_1 \ o\ س_2)$$

$$(س_1 \ o\ س_1) \ o\ (س_2 \ o\ س_2) = \varphi(س_1 \ o\ س_2)$$ (لأنo تبديلية وتجميعية).

$$= س_1^2 \ o\ س_2^2 .$$

$$= \varphi\ (س_1) \ o\ \varphi(س_2)$$ إذن φ تشاكل.

3 – 4 – 2 التشاكل التقابلي :

مج$_1$ مجموعة مزودة بعملية داخلية * وَ **مج**$_2$ مجموعة مزودة بعملية داخلية T .

تـا تـطبيـق من مج$_1$ نحـو مج$_2$

نـقـول أن تـا تـشـاكـل تـقـابـلـي إذا كـان :

- تـا تـشـاكـلاً .
- تـا تـقـابـلاً.

3 – 4 – 2 – 1 مثـال :

(مـج ، ×) زمـرة. ي عـنـصـر حـيـادي لـلـعـمـلـيـة× فـي مـج

ا عنصـر مـن مـج. ولـيكـن $\varphi_{ا}$ تـطـبـيـقـا مـعـرفـا كـمـا يـلـي :

$\varphi_{ا}$: مج ⟵ مج : $\varphi_{ا}$ (س) = ا . س . ا $^{1-}$ (ا $^{1-}$ نظير ا)

بـرهـن أن $\varphi_{ا}$ تـشـاكـلا تـقـابـلـي .

الحـل : • نـبـرهـن أن $\varphi_{ا}$ تـشـاكـل.

$\varphi_{ا}$ تشاكل ⟺ ∀(س$_1$ ، س$_2$) ∋ مج^2 : $\varphi_{ا}$ (س$_1$ × س$_2$) = $\varphi_{ا}$ (س$_1$) × $\varphi_{ا}$ (س$_2$)

$\varphi_{ا}$ (س$_1$ × س$_2$) = ا (س$_1$ × س$_2$) ا $^{1-}$ = ا (س$_1$) (ا$^{1-}$ × ا) (س$_2$) ا $^{1-}$

= (ا س$_1$ ا $^{1-}$) × (ا س$_2$ ا $^{1-}$)

= $\varphi_{ا}$ (س$_1$) × $\varphi_{ا}$ (س$_2$)

إذن $\varphi_{ا}$ تـشـاكـل.

• نـبـرهـن أن $\varphi_{ا}$ تـقـابـل.

($\varphi_{ا}$ تـقـابـل) ⟺ (∀ ع ∋ مج ، E س ∋ مج وَ س وحـيـد : $\varphi_{ا}$ (س) = ع)

$\varphi_{ا}$ (س) = ع ⟺ ع = ا . س . ا $^{1-}$

⟺ ا $^{1-}$ ع = ا $^{1-}$. ا . س . ا $^{1-}$ ⟺ ا $^{1-}$ ع = س . ا $^{1-}$

⟺ ا $^{1-}$ ع . ا = س . ا $^{1-}$. ا

⟺ ا $^{1-}$. ع . ا = س

⟺ س = ا $^{1-}$. ع . ا

ومـنـه $\varphi_{ا}$ تـقـابـل .

إذن $\varphi_{ا}$ تـشـاكـل تـقـابـلـي مـن (مـج ،×) فـي (مـج ،×).

3 – 4 – 2 – 2 نظرية :

مـج مـجـمـوعــة مـزودة بـعـمـلـيـة داخـلـيـة * ، ل مـجـمـوعــة مـزودة بـعـمـلـيـة داخـلـيـةT . تـا تشـاكل تـقـابـلـي مـن (مـج ، *) فـي (ل ،T) الـتـطـبـيـق الـعـكـسـي للتـطـبـيـق تـا هـو تشـاكل تقابـلـي من (ل ،T) نـحـو (مـج ، *)

الـبـرهـان :

بـمـا أن تـا تـطـبـيـق تـقـابـلـي يـكـون الـتـطـبـيـق $تا^{-1}$ تـقـابـلـيًا.

لـنـبـرهـن أن $تا^{-1}$ تـشـاكـل

مـهـمـا كـان عَ وَ عً مـن ل، يـوجـد سَ وَ سً مـن مـج حيـث :

عَ = تـا (سَ)   وَ   عً = تـا (سً)

لـديـنـا :

$تا^{-1}$ (عَ T عً) $تا^{-1}$ = [تـا (سَ) T تـا (سً)]

$تا^{-1}$ = [تـا (سَ * سً)] لأن تـا تـشـاكـل.

=   سَ * سً   لأن : $تا^{-1}$ o تـا = $I_{مج}$

= $تا^{-1}$ (عَ) * $تا^{-1}$ (عً) لأن : عَ = تا (سَ) يـعـنـي

سَ = $تا^{-1}$ (عَ)

و عً = تـا (سً) ⟺ سً = $تا^{-1}$ (عً)

إذن : ∀ (عَ ، عً) ∋ $ل^2$: $تا^{-1}$ (عَ T عً) = $تا^{-1}$ (عَ) * $تا^{-1}$ (عً)

ومـنـه فـإن $تا^{-1}$ تـشـاكـل تـقـابـلـي.

3 – 4 – 2 – 3 : نـظـريـة :

إذا كـان تـا تـشـاكـل تـقـابـلـي مـن (**س** ، *) نـحـو (**ع** ، T)
وكـانـت (**س** ، *) زمـرة تـبـديـلـيـة فـإن (**ع** ،T) زمـرة تـبـديـلـيـة.

الـبـرهـان :

تـا تشاكل ⟺ ∀ (سَ ، سً) ∋ $\textbf{س}^2$: تـا (سَ * سً) = تـا (سَ)T تـا (سً)

تـا تـقابلي ⟺ ∀ ع ∋ **ع** ، E س ∋ **س** وَس وحـيـد : تـا (س) = ع

نـفـرض أن (**س** ، *) زمـرة تـبـديـلـيـة ونـبـرهـن أن (**ع** ،T) زمـرة تـبـديـلـيـة.

* T تـبـديـلـيـة فـي **ع** ⟺ ∀ (عَ ، عً) ∋ $\textbf{ع}^2$: عَ Tعً = عً T عَ

عَ T عً = تـا (سَ) T تـا (سً)

= تـا (سَ * سً)

= تا (سً * سَ) = تـا (سً) T تـا (سَ)

= عً T عَ

ومنـه T تبديليـة

*T تجميعية في **ع** ⇔ ∀ (عَ ،عً ،عٌ) ∋ **ع** ^{3}: عَ T(عً T عٌ) = (عَ T عً) T عٌ.

عَ T (عً T عٌ) = تـا (سَ) T [تـا (سً) T تـا (سٌ)]

= تـا (سَ) T تـا (سً * سٌ)

= تـا [سَ * (سً * سٌ)] = تـا[(سَ * سً) * سٌ]

= تا (سَ * سً) T تا (سٌ)

= [تـا (سَ) T تـا (سً)] T تـا(سٌ)

= (عَ T عً) T عٌ.

ومنـه T تـجـمـيـعـيـة فـي **ع**

● **الـعـنـصـر الـحـيـادي** : ي هو العنصـر الحيـادي للعمـليـة * .

لـديـنـا : ع T تـا (ي) = تـا (س) T تـا (ي)

= تـا (س * ي) = تـا (س) = ع

وكـذلـك : تـا (ي)T ع = تـا (ي) T تـا(س)

= تـا(ي*س) = تا(س) = ع.

وبـالـتـالي : تـا (ي) هـو الـعـنـصـر الـحـيـادي لـلـعـمـلـيـة T

● **الـعـنـصـر الـنـظـيـر** : بـمـا أن (**س** ، *) زمـرة تـبـديـلـيـة فـإن كـل عـنـصـر س مـن **س** يـقـبـل نظيرا سَ فـي **س** . إذن س * سَ = ي وَ سَ * س = ي حيـث ي العـنـصـر الحـيـادي لـلـعـمـلـيـة * .

مـن : س * سَ = سَ * س = ي يـنـتـج :

تا(س *سَ) = تا(سَ*س) = تا (ي) أي تا(س)T تا(سَ) =تا(سَ)T تا(س) = تا (ي)

أي : ع T عَ = عَ T ع = تـا (ي)

إذن لـكـل عـنـصـر مـن **ع** عـنـصـر نـظـيـر.

ومـنـه : (**ع** ،T) زمـرة تـبـديـلـيـة.

مـلاحـظـات :

- إذا كـانــت (**مج** $_1$ ، *) زمـرة وَ (**مج** $_2$ ،T) زمـرة و كـان φ تـشـاكـلاً لِـ (**مج** $_1$ ، *) فـي (**مج** $_2$ ، T) نـقـول إن :

الـزمـرتـيـن (**مج** $_1$ ، *) وَ(**مج** $_2$ ،T) مـتشـاكـلـتان وإذ كـان φ تقـابلـي نقـول إن : الـزمـرتـيـن (**مج** $_1$ ، *) وَ (**مج** $_2$ ، T) مـتـشـاكـلـتـان تـقـابـلـيـا

- إذا كـانـت (**مـ ج** $_1$ ، * ،o) حـلـقـة وَ(**مج** $_2$ ،⊥، T) حـلـقـة وَ كـان φ تـطـبـيـقـا مـن

(مـ ج $_1$ ، * ، o) فـي(مج $_2$ ، ⊥، T)

بحيث :

$\forall$ (س$_1$ ، س $_2$) ∋ مج$_1^2$: $\left\{ \begin{array}{l} \varphi\,(\text{س}_1 * \text{س}_2) = \varphi\,(\text{س}_1) \perp \varphi\,(\text{س}_2) \\ \varphi\,(\text{س}_1 \;\; \text{س}_2) = \varphi\,(\text{س}_1)\, T\, \varphi\,(\text{س}_2) \end{array} \right.$

نقول أن الحلقتين متشاكلتان.

3 – 4 – 3 – تركيب تشاكلين :

نظرية :

لـيكن الـتطبـيق تا المعرف من (مـج $_1$ ، *) فـي(مج $_2$ ،) تشاكلا.
و ليكن الـتطبيق ها المعرف من(مج $_2$ ،) فـي (مج $_3$، ⊥)تشاكلا.
إن الـتطبيق هاoتا من(مـج $_1$ ، *) في(مج $_3$، ⊥) تشاكل.

البـرهان :

$\forall$(س ، ع) ∋ مج$_1^2$ لدينا :

(ها o تا) (س * ع) = ها [تا (س * ع)]

= ها [تا (س) T تا (ع)] (لأن تا تشاكل)

= ها [تا (س)] ⊥ ها (تا (ع)] (لأن ها تشاكل)

= (ها o تا) (س) ⊥ (ها o تا) (ع)

إذن :

(هاo تا) (س * ع) = (ها o تا) (س) ⊥ (ها o تا) (ع)

ومنه ها o تا تشاكل لِ (مـج $_1$ ، *) فـي(مج $_3$، ⊥)

4 – تمارين التصحيح الذاتي :

4 – 1 : نعرف في المجموعة ط علاقةع كما يلي :

$\forall$(س ، ص) ∋ ط ^{2} : (سعِ ص) ⟺ س ^{2}–ص ^{2} – 7 س + 7 ص = 0)

برهن أنعِ هي علاقة تكافؤ، عين أصناف التكافؤ الآتية $\bar{0}$ ، $\bar{9}$ و $\bar{أ}$. (أ ∋ ط).

عين مجموعة حاصل القسمة $\frac{\text{ط}}{\text{ع}}$.

4 – 2 –ع علاقة معرفة في مجموعة الأعداد الحقيقية ح كما يلي :

$\forall$(أ ، ب) ∋ ح^{2} : (أع ب) ⇔ (أ^{3}–ب^{3} ≥ 0).

برهن أن ع علاقة ترتيب، ما نوع هذا الترتيب ؟

4 – 3 – لنعتبر التطبيق تا للمجموعة ح - { 2 } في المجموعة ح - { 1 } المعرف كما يلي :

$$\text{تا (س)} = \frac{\text{س} + 5}{\text{س} - 2}$$

أثبت أن التطبيق تا تقابل. عين تطبيقه العكسي تا$^{-1}$.

4 – 4 - تا تطبيق معرف كما يلي :

تا :] 0 ، + ∞ [←] - 2 ، + ∞ [: تا (س) = س^{2} + س – 2

أثبت أن تا تقابل. عين تا$^{-1}$

4 – 5 - لنعتبر التطبيق تا المعرف بما يلي :

تا : ح ← ح : تا (س) = 5 س + 3.

نزود المجموعة ح بالعملية الداخلية * المعرّفة كما يلي :

$\forall$(أ ، ب) ∋ ح^{2} : أ *ب =أ + ب – 3. برهن أن (ح ، *) زمرة تبديلية

برهن أن تا تشاكل من (ح ، +) في (ح ، *)

5 – أجوبة التصحيح الذاتي :

5 – 1 نبرهن أنع علاقة تكافؤ :

(ع إنعكاسية) ⇔ ($\forall$س ∋ ط ، سع س)

$\forall$ س ∋ ط، س^{2}–س^{2} – 7 س + 7 س = 0 أي أن سع س ومنهع إنعكاسية

(ع تناظرية) ⇔ [$\forall$(س ، ص) ∋ ط^{2} : سع ص ⇐ ص ع س].

$\forall$ (س ، ص) ∋ ط^{2} :

سع ص ⇐ س^{2} –ص^{2} – 7 س+ 7 ص= 0 ص^{2} –س^{2} ⇐– 7 ص + 7 س = 0

و منه صع س أي أنع تناظرية.

(ع متعدية) ⟺ ∀(س ، ص ، ع)∋ ط^3 : (س ع ص وَ ص ع ع) ⟸ س ع ع

∀ (س ، ص ، ع) ∋ ط^3 :

$$\left.\begin{array}{c} \text{س ع ص} \\ \text{وَ} \\ \text{ص ع ع} \end{array}\right\} \Leftarrow \left|\begin{array}{cc} \text{س}^2 - \text{ص}^2 - 7\text{س} + 7\text{ص} = 0 & (1) \\ \text{وَ} & \\ \text{ص}^2 - \text{ع}^2 - 7\text{ص} + 7\text{ع} = 0 & (2) \end{array}\right.$$

بجمع المساوتين (1) وَ (2) طرفا لطرف ينتج :

س^2 – ع^2 – 7 س + 7 ع = 0 أي س ع ع وعليه ع متعدية.

نستخلص مما سبق أن ع علاقة تكافؤ.

تعيين أصناف التكافؤ :

$\bar{0}$ = { س ∋ ط / س ع 0 }

$\bar{0}$ = { س ∋ ط / س^2 – 0^2 – 7 س + 7 (0) = 0 }

$\bar{0}$ = { س ∋ ط / س (س – 7) = 0 }

$\bar{0}$ = { 0 ، 7 }.

$\bar{9}$ = { س ∋ ط / س ع 9 }

$\bar{9}$ = { س ∋ ط س^2 – 9^2 / – 7 س + 7 × 9 = 0 }

$\bar{9}$ = { س ∋ ط / (س + 9) (س – 9) – 7 (س – 9) = 0 }

$\bar{9}$ = { س ∋ ط / (س – 9) (س + 2) = 0 }

$\bar{9}$ = { 9 } لأن : –2 ∌ ط.

$\bar{أ}$ = { س ∋ ط / س ع أ }

$\bar{أ}$ = { س ∋ ط / س^2 – أ^2 – 7 س + 7 أ = 0 }

$\bar{أ}$ = { س ∋ ط / (س – أ) (س + أ) – 7 (س – أ) = 0 }

$\bar{أ}$ = { س ∋ ط / (س – أ) (س + أ – 7) = 0 }

(س – أ) (س + أ – 7) = 0 ⟺ س = أ أو س = 7 – أ

إذا كان أ ≤ 7 فإن $\bar{أ}$ = { أ ، 7 – أ }

إذا كان أ > 7 فإن $\bar{أ}$ = { أ }

تعيين مجموعة حاصل القسمة $\frac{ط}{ع}$

$\frac{ط}{ع}$ = { { 0 ، 7 }،{ 1 ، 6 }،{ 2 ، 5 }،{ 3 ، 4 }،{ 8 } ، { 9 } ، { 10 } ،...... }

2 – نبرهن أن ع علاقة ترتيب :

– ع إنعكاسية ⇔ (∀ ٲ ∍ ج ، ٲ ع ٲ)

∀ ٲ ∍ ج ، $ٲ^3 - ٲ^3 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 0$ و منه ٲ ع ٲ إذن ع إنعكاسية

(ع ضد تناظرية) ⇔ (∀ (ٲ ، ب) ∍ $ج^2$: (ٲ ع ب وَ ب ع ٲ) ⇐ ٲ = ب).

$$\left\{\begin{array}{l} ٲ\ ع\ ب \\ وَ \\ ب\ ع\ ٲ \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} ٲ^3 - ب^3 \geq 0 \\ وَ \\ ب^3 - ٲ^3 \geq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} ٲ^3 - ب^3 \geq 0 \\ وَ \\ -(ٲ^3 - ب^3) \geq 0 \end{array}\right. \quad .... \ (\mathrm{I})$$

ينتج من الجملة **(I)** أن ، $ٲ^3 = ب^3$ أي ٲ = ب و منه ع ضد تناظرية.

(ع متعدية)⇔ [∀ (ٲ ، ب، جـ)∍ $ج^3$: (ٲ ع ب وَ ب ع جـ) ⇐ ٲ ع جـ)

$$\left\{\begin{array}{l} ٲ\ ع\ ب \\ وَ \\ ب\ ع\ جـ \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} ٲ^3 - ب^3 \geq 0 & (1) \\ وَ & \\ ب^3 - جـ^3 \geq 0 & (2) \end{array}\right.$$

بجمع (1) و (2) طرفاً لطرف ينتج : $\left(ٲ^3 - ب^3\right) + \left(ب^3 - جـ^3\right) \geq 0$ أي $ٲ^3 - جـ^3 \geq 0$ إذن ٲ ع جـ وعليه ع علاقة متعدية في ج.

ينتج مما سبق أن ع علاقة ترتيب في ج .

نلاحظ أن : ∀ (ٲ ، ب) ∍ $ج^2$: $ٲ^3 - ب^3 \geq 0$ أو $ب^3 - ٲ^3 \geq 0$

أي ∀ (ٲ ، ب) ∍ $ج^2$ ٲ ≤ ب أو ب ≤ ٲ

إذن القضية : [(ٲ ≤ ب) أو (ب ≤ ٲ)] صحيحة من أجل كل ٲ وَ ب من ج إذن ع علاقة ترتيب كلي في ج.

5 – 3 (تا تطبيق) ⇔ (تا متباين وَ تا غامر).

(تا متباين) $\Leftrightarrow$ $\forall$ س$_1$ $\in$ ح $-$ { 2 }، $\forall$ س$_2$ $\in$ ح $-$ {2}: تا (س$_1$) = تا (س$_2$) $\Leftarrow$ س$_1$ = س$_2$

لدينا تا(س$_1$) = $\dfrac{\text{س}_1+5}{\text{س}_1-2}$ و َ تا (س$_2$) = $\dfrac{\text{س}_2+5}{\text{س}_2-2}$

نفرض أن تا(س$_1$) = تا (س$_2$) ونثبت أن س$_1$ = س$_2$

لدينا : $\dfrac{\text{س}_1+5}{\text{س}_1-2} = \dfrac{\text{س}_2+5}{\text{س}_2-2} \Leftarrow (\text{س}_1+5)(\text{س}_2-2) = (\text{س}_2+5)(\text{س}_1-2)$

$\Leftarrow 7\text{س}_2 = 7\text{س}_1$

$\Leftarrow$ س$_2$ = س$_1$ إذن تا متباين.

* تا غامر $\Leftrightarrow$ [$\forall$ ع $\in$ ح $-$ { 1 } ، E س $\in$ ح $-$ { 2 } : تا (س) = ع].

نحل المعادلة ع = تا(س) في المجموعة ح $-$ { 2 } ذات المجهول س.

ع = تا (س) $\Leftrightarrow$ ع = $\dfrac{\text{س}+5}{\text{س}-2}$ $\Leftrightarrow$ ع (س $-$ 2) = س + 5

$\Leftrightarrow$ س (ع $-$ 1) = 2 ع + 5

$\Leftrightarrow$ س (ع $-$ 1) = 2 ع + 5

$\Leftrightarrow$ س = $\dfrac{2\text{ع}+5}{\text{ع}-1}$ (ع $\neq$ 1)

ومنه س موجودة من أجل كل ع من ح $-$ { 1 } ، س $\in$ ح $-$ { 2 }

إذن تا غامر، وعليه تا تقابل.

ومنه تا يقبل تطبيقا عكسيا. لتعيينه نحسب س بدلالة ع من العلاقة ع = تا(س)

فنجد س = $\dfrac{2\text{ع}+5}{\text{ع}-1}$

إذن التطبيق العكسي تا$^{-1}$ للتطبيق تا معرف كما يلي :

تا$^{-1}$: ح $-$ { 1 } $\leftarrow$ ح $-$ { 2 } : تا$^{-1}$ (س) = $\dfrac{2\text{س}+5}{\text{س}-1}$.

5 – 4 – ليكن التطبيق تا :[0 ،+∞ [$\longrightarrow$] $-$2 ، +∞ [: تا(س) = س^2+س$-$2

تا تقابل إذا وفقط إذا كان :

($\forall$ ع $\in$] $-$ 2 ، +∞[، E س $\in$] 0 ،+∞ [وحيد : ع = س^2 + س $-$ 2

ع = $س^2$ + س – 2 $\Leftrightarrow$ $س^2$ + س – 2 – ع = 0 ....(1)

نحسب المميزةΔ :

Δ = $ب^2$ – 4أ جـ = $(1)^2$ – 4 (1) (– 2 – ع) = 1 + 8 + 4 ع = 4 ع +9.

فرضا ع $\geq$ – 2 فيكون 4 ع$\geq$ – 8 ومنه 4 ع + 9 $\geq$ 1

ومنه Δ > 0 من أجل كل ع من [– 2 ، + ∞ [

المعادلة (1) تقبل حلين متمايزين في ح.

$$س_1 = \frac{-1-\sqrt{4ع+9}}{2} \quad ، \quad س_2 = \frac{-1+\sqrt{4ع+9}}{2}$$

ولكن : $س_1 \notin$ [0 ، + ∞ [. فلنبين أن : $س_2 \in$ [0 ، + ∞ [

لدينا 4 ع + 9 $\geq$ 1 $\Leftarrow$ $\sqrt{4ع+9}\geq 1$ ومنه $\frac{-1+\sqrt{4ع+9}}{2}\geq 0$

ومنه المعادلة (1) تقبل حلاً وحيدًا في [0 ، + ∞ [

إذن تا تطبيق تقابلي فهو يقبل تطبيقاً عكسيا $تا^{-1}$ حيث :

$تا^{-1}$: [– 2 ، + ∞ [$\leftarrow$ [0 ، + ∞ [: $تا^{-1}$ (س) = $\frac{-1+\sqrt{4س+9}}{2}$

5 – 5 – لنبرهن أن (ح ، *) زمرة تبديلية.

- خاصية التبديل :

* تبديلية في ح $\Leftrightarrow$ [$\forall$(أ ، ب) $\in$ $ح^2$: أ * ب = ب * أ]

$\forall$(أ ، ب) $\in$ $ح^2$: أ * ب = أ + ب – 3 = ب + أ – 3 (لأن الجمع تبديلي في ح)

= ب *أ ومنه * تبديلية في ح

- خاصية التجميع :

* تجميعية في ح $\Leftrightarrow$ [$\forall$ (أ ، ب ، جـ) $\in$ $ح^3$: (أ * ب) *جـ = أ *(ب * جـ)]

($\forall$ (أ ، ب ، جـ) $\in$ $ح^3$: (أ * ب) * جـ = (أ + ب – 3) * جـ

= أ + ب – 3 + جـ –3

= أ + (ب – 3 + جـ) – 3.

= أ * (ب + جـ – 3).

= أ * (ب * ج)

ومنه * تجميعية في ح .

• **العنصر الحيادي :**

يكون العنصر ي من ج عنصرًا حياديا بالنسبة للعملية * إذا كان : ∀ أ ∋ ج : أ * ي = أ وَ ي * أ = أ

بما أن العملية * تبديلية في ج يكفي حل المعادلة أ * ي = أ.

أ * ي = أ ⟺ أ + ي – 3 = أ ⟺ ي = 3.

إذن * تقبل عنصرًا حيادياً في ج وهو ي = 3.

• العنصر النظير :

يكون العنصر أَ من ج نظيراً للعنصر أ من ج بالنسبة إلى * إذا كان :

أ * أَ = ي وَ أَ * أ = ي حيث ي هو العنصر الحيادي للعملية *.

بما أن العملية * تبديلية في ج إذن يكفي حل المعادلة : أ * أَ = ي.

أ * أَ = ي ⟺ أ + أَ – 3 = 3 ⟺ أَ = 6 – أ.

إذن لكل عنصر من ج عنصر نظير في ج.

إذن (ج ، *) زمرة تبديلية.

• نبرهن أن تا تشاكل من (ج ، +) في (ج ، *).

تا تشكل ⟺ [∀(أ ، ب) ∋ ج^2 : تا (أ + ب) = تا (أ) * تا (ب)]

تا (أ + ب) = 5 (أ + ب) + 3 = 5أ + 5ب + 3.

تا (أ) * تا (ب) = تا(أ) +تا(ب) – 3 (حسب تعريف العملية *)

= 5 أ + 3 + 5ب + 3 – 3

= 5 أ + 5ب + 3 = تا (أ + ب).

أي أن : تا (أ + ب) = تا (أ) * تا (ب).

ومنه تا تشاكل من (ج ، +) في (ج ، *).

فهرس السلسلة الثانية

تتضمن هذه السلسلة درسين هما :

*** مجموعة الأعداد الطبيعية (ℕ)**

*** التحليل التوفيقي**

مجموعة الأعداد الطبيعيّة ℕ

الهدف من الدرس :

هذا الدرس في غاية الأهمية إذ سنتطرّق في الفقرة الرابعة منه إلى طريقة جديدة في البرهان تدعى : "البرهان بالتراجع "

المدة اللازمة لدراسة : أربع ساعات.

الدروس التي ينبغي الرجوع إليها :

1 – المنطق الرياضي.

2 – حسابات العاملي

المراجع الخاصة بهذا الدرس :

كتاب الرياضيات 3 ث/ع + ر المعهد التربوي الوطني

تصميم الدرس

1 - العلاقة الثنائية في ط.
2 - العمليات الداخلية في ط.
3 - القسمة الإقليدية في ط .
4 - البرهان بالتراجع.
5 - تمارين التصحيح الذاتي.
6 - الأجوبة.

1 – العلاقة الثنائية ≥ في ط :

من خلال دراستنا السابقة عرفنا أن المجموعة ط مرتبة ترتيبا كليا بواسطة العلاقة ≥ وليس لها عنصر أكبر ولا حد أعلى.

* وكل مجموعة جزئية من ط محدودة من الأعلى وغير خالية تقبل عنصرًا أكبراً.

* ولكل مجموعة جزئية من ط غير خالية عنصر أصغر.

2 – العمليات الدّاخلية في ط :

* يمكن أن نرفق بكل عددين طبيعيين أ ، ب مجموعهما أ + ب وجداءهما أ × ب بواسطة عمليتين، الجمع والضرب على الترتيب. فكل منهما عملية داخلية في ط وتحقق الخواص الآتية :

- ∀ (أ ، ب) ∋ ط^2 : أ + ب = ب +أ وَ أ × ب = ب × أ.

أي أن عمليتي الجمع والضرب تبديليتان في ط .

- ∀ (أ ، ب ، جـ) ∋ ط^3 : (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ)

(أ × ب) × جـ = أ × (ب × جـ)

أي أن عمليتي الجمع والضرب تجميعيتان في ط:

• الصفر (0) والواحد (1) هما العنصران الحياديان بالنسبة للجمع والضرب على الترتيب أي :

∀ أ ∈ ط : أ + 0 = 0 + أ = أ وَ أ ×1 = 1 × أ = أ.

• في ط ،عملية الضرب توزيعية بالنسبة لعملية الجمع أي :

∀ (أ ، ب ، جـ) ∈ ط^{3} : أ × (ب + جـ) = أ × ب + أ × جـ.

(ب + جـ) × أ = ب × أ + جـ × أ.

• (ط ، +) ليست زمرة لأنه ليس لكل عدد طبيعي نظير بالنسبة لعملية الجمع في ط، بل لا يوجد لأي عنصر نظير ما عدا الصفر.

• (ط ، ×) ليست زمرة لأنه ليس لكل عدد طبيعي نظيراً بالنسبة لعملية الضرب في ط، بل لا يوجد لأي عنصر نظير ما عدا الواحد.

– عمليتا الجمع والضرب تحققان :

• ∀ (أ ، ب ، جـ) ∈ ط^{3} : أ + جـ = ب + جـ ⇐ أ = ب.

• ∀ أ ∈ ط ، ∀ ب ∈ ط ، ∀ جـ ∈ ط* : أ × جـ = ب × جـ ⇐ أ = ب.

– علاقة الترتيب (≥) منسجمة مع عمليتي الجمع والضرب أي :

∀ (أ ، ب ، أَ، بَ) ∈ ط^{4} : { أ ≥ ب و أَ ≥ بَ } ⇐ { أ + أَ ≥ ب + بَ و أ × أَ ≥ ب × بَ }

3 – القسمة الإقليدية في ط :

– ∀ (أ ، ب) ∈ ط × ط* فإنه يوجد زوج وحيد (جـ ، ق) بحيث :

أ = ب × جـ + ق . وَ (ب > ق ≥ 0)

• فإذا كان ق = 0 ، قلنا إن ب يُقسّم أ . (ب /أ).

• نسمي جـ ناتج (حاصل) قسمة أ على ب ، ق باقي القسمة الإقليدية لِـ أ على ب.

• وإذا كان أ > ب فإن جـ = 0 وَ ق = أ

3 – 1 مثال : (أ ، ب) = (5 ، 2) فإنه يوجد (جـ ، ق) = (2 ، 1)

بحيث : $5 = 2 \times 2 + 1$

4 – البرهان بالتراجع :

كثير من التمارين والقضايا الرياضية التي تتعلق بالعدد الطبيعي ن الذي يمسح ط

وكمثال على ذلك :

• أثبت أنه : $\forall$ ن $\in$ ط : $\frac{ن(ن+1)}{2} \in$ ط

فإثبات ذلك يقتضي إعطاء ن القيم : 0 ، 1 ، 2 ، 3 ،...

ثم التأكّد في كل مرّة أن العدد الناتج ينتمي إلى المجموعة ط. وهذا يتطلّب وقتًا طويلاً زيادةً عن كون ط غير منتهية. ولذا نعرض طريقة أخرى لمعالجة مثل هذه التمارين تتمثل في " البرهان بالتراجع ".

ويعتمد هذا البرهان على النظرية التالية :

4 – 1 : نظرية :

إذا كانت خ (ن) خاصية تتعلق بالعدد الطبيعي ن.

وكان : $\begin{cases} خ(0) & \text{محققة} \\ \forall ن \in ط : خ(ن) \Leftarrow خ(ن+1) & \text{محقق} \end{cases}$

فإن خ (ن) محققة من أجل كل ن من ط.

4 – 2 – مثال :

برهن أنه : $\forall$ ن $\in$ ط : ($4^{ن}$ - 1) يقبل القسمة على 3

* من أجل ن = 0 ، $4^{0} - 1 = 0$ وهو يقبل القسمة على 3.

* لنفرض أن : ($4^{ن}$ - 1) يقبل القسمة على 3 أي يوجد ك $\in$ ط بحيث : $4^{ن}$ - 1 = 3 ك

ولنبرهن أن : ($4^{ن+1} - 1$) يقبل القسمة على 3

$4^{ن+1} - 1 = 4 . 4^{ن} - 1 = 4 (3ك + 1) - 1 = 12 ك + 3 = 3 (4 ك + 1)$

وهو يقبل القسمة على 3 لأنه من مضاعفات 3.

إذن : $\forall$ ن $\in$ ط : ($4^{ن}$ − 1) يقبل القسمة على 3.

4 − 3 − الحالة العامة :

وهي الحالة التي يكون فيها :

التراجع يبتدأ من 1 أو 2 أو هـ حيث (هـ> 2) . عندئذ يأخذ مبدأ التراجع الشكل الآتي :

إذا كان : $\begin{cases} \text{خ (هـ)} & \text{محققة} \\ \forall ن \geq \text{هـ} : \text{خ (ن)} \Rightarrow \text{خ (ن+1)} & \text{محقق} \end{cases}$

فتكون خ (ن) محققة من أجل كل ن ≥ هـ.

5 – تمارين التصحيح الذاتي :

5 − 1 : برهن أنه $\forall$ ن $\in$ ط* : 2 × 6 × 10 × . . . × (4 ن − 2)

= (ن + 1) (ن + 2) × ...... × (2 ن).

5 – 2 : برهن أن مجموع مكعبات أي ثلاثة أعداد طبيعية متتالية يقبل القسمة على 9 .

5 − 3 : برهن أن : $\forall$ ن $\in$ ط : $أ_{ن} = 3^{ن+3} - 4^{ن\,٤+2}$ يقبل القسمة على 11 .

6 − الأجوبة :

6 – 1 * من أجل ن = 1 نجد :

الطرف الأيمن = 2 وَ الطرف الأيسر = 2

فالطرفان متساويان وبالتالي خ (1) محققة (صحيحة)

* نفرض أن المساواة صحيحة من أجل العدد الطبيعي ن أي أن :

2 × 6 × 10 ×... × (4 ن – 2) = (ن +1) (ن + 2)× .... × (2 ن) . (*) .

ولنبرهن صحة المساواة من أجل (ن + 1) أي :

2 ×6 ×10×... × (4 ن− 2) (4ن +2) = (ن +2) (ن +3)× ... × (2 ن+1)(2 ن +2)

بضرب طرفي المساواة (*) في (4 ن + 2) ينتج :

$2 \times 6 \times 10 \times \ldots \times (4\text{ن}-2) \times (4\text{ن}+2) = (\text{ن}+1)(\text{ن}+2) \times \ldots \times (2\text{ن}) \times (4\text{ن}+2)$

$= (\text{ن}+1)(\text{ن}+2) \times \ldots\ldots \times (2\text{ن}) \times 2 \times (2\text{ن}+1)$

$= (\text{ن}+2)(\text{ن}+3) \times \ldots\ldots \times (2\text{ن}) \times (2\text{ن}+1) \times (2\text{ن}+2)$

أي أن المساواة محققة من أجل ن + 1

إذن : أنه من أجل كل عدد طبيعي ن من ط^* فإن المساواة :

$2 \times 6 \times 10 \times \ldots \times (4\text{ن}-2) = (\text{ن}+1)(\text{ن}+2) \times \ldots\ldots \times (2\text{ن})$ محققة.

6 – 2 : بما أن الأعداد الطبيعية الثلاثة متتالية فيمكننا أن نرمز لها بـ :ن− 1 ، ن ، ن + 1 فالمطلوب يصبح كالآتي :

$\forall$ ن $\in \text{ط}^*$: $\text{أ}_{\text{ن}} = (\text{ن}-1)^3 + \text{ن}^3 + (\text{ن}+1)^3$ يقبل القسمة على 9

من أجل ن = 1:

$\text{أ}_1 = (1-1)^3 + 1^3 + (1+1)^3 = 1 + 8 = 9.$

9 يقبل القسمة على 9

فالخاصية محققة من أجل ن = 1.

* نفرض أن العدد $\text{أ}_{\text{ن}}$ يقبل القسمة على 9 وذلك من أجل ن $\in \text{ط}^*$ أي يوجد ك بحيث : $\text{أ}_{\text{ن}} = 9\text{ك} \;/\; \text{ك} \in \text{ط}$

ولنبرهن أن : $\text{أ}_{\text{ن}+1}$ يقبل القسمة على 9.

لدينا : $\text{أ}_{\text{ن}+1} = (\text{ن}+2)^3 + \text{ن}^3 + (\text{ن}+1)^3$

لنحسب الفرق : $\text{أ}_{\text{ن}+1} - \text{أ}_{\text{ن}}$

$\text{أ}_{\text{ن}+1} - \text{أ}_{\text{ن}} = \text{ن}^3 + (\text{ن}+1)^3 + (\text{ن}+2)^3 - (\text{ن}-1)^3 - \text{ن}^3 - (\text{ن}+1)^3.$

$= (\text{ن}+2)^3 - (\text{ن}-1)^3$

$= (\text{ن}+2-\text{ن}+1)\left[(\text{ن}+2)^2 + (\text{ن}+2)(\text{ن}-1) + (\text{ن}-1)^2\right]$

$= 3\left(3\text{ن}^3 + 3\text{ن} + 3\right)$

$= 9\left(\text{ن}^2 + \text{ن} + 1\right)$. نضع : $\text{ن}^2 + \text{ن} + 1 = \alpha$

فيكون : $\text{أ}_{\text{ن}+1} - \text{أ}_{\text{ن}} = 9\alpha$

أي : $\text{أ}_{\text{ن}+1} = 9\alpha + \text{أ}_{\text{ن}} = 9\alpha + 9\text{ك} = 9(\alpha + \text{ك})$

ومنه مجموع مكعبات ثلاثة أعداد طبيعية متتالية يقبل القسمة على 9.

6 – 3 :

• من أجل ن = 0 ، $\text{أ}_0 = 3^3 - 4^2 = 27 - 16 = 11$

إذن أ_0 يقبل القسمة على 11 وبالتالي خ (0) محققة.

* لنفرض أن : $\text{أ}_\text{ن} = 3^{\text{ن}+3} - 4^{4\text{ن}+2}$ يقبل القسمة على 11

عندئذ يوجد ك ∈ ط : $\text{أ}_\text{ن} = 11\text{ك}$

ولنبرهن أن : $\text{أ}_{\text{ن}+1} = 3^{\text{ن}+4} - 4^{4\text{ن}+6}$ يقبل القسمة على 11

لدينا : $\text{أ}_{\text{ن}+1} = 3^{\text{ن}+4} - 4^{4\text{ن}+6}$

$= 3 \,.\, 3^{\text{ن}+3} - 4^4 .\, 4^{4\text{ن}+2}$

$= 3 \,.\, 3^{\text{ن}+3} - 256 .\, 4^{4\text{ن}+2}$

$= 3 \,.\, 3^{\text{ن}+3} - (253+3) .\, 4^{4\text{ن}+2}$

$= 3 \,.\, 3^{\text{ن}+3} - 3 .\, 4^{4\text{ن}+2} - 253 .\, 4^{4\text{ن}+2}$

$= 3\left[3^{\text{ن}+4} - 4^{4\text{ن}+2}\right] - 11 \times 23 \times 4^{4\text{ن}+2}$

$= 3\,\text{أ}_\text{ن} - 11 \,.\, 23 \,.\, 4^{4\text{ن}+2}$

$= 3 \,.\, (11\text{ك}) - 11 \,.\, 23 \,.\, 4^{4\text{ن}+2}$

$\text{أ}_{\text{ن}+1} = 11\left[3\text{ك} - 23 .\, 4^{4\text{ن}+2}\right]$

$= 11\,\alpha$ (حيث $\alpha = 3\text{ك} - 23 .\, 4^{4\text{ن}+2}$)

إذن : $\text{أ}_{\text{ن}+1}$ يقبل القسمة على 11

ومنه : $\forall$ ن ∈ ط : $\text{أ}_\text{ن} = 3^{\text{ن}+3} - 4^{4\text{ن}+2}$ يقبل القسمة على 11.

التَّحْليل التَّوفيقيُّ

الهدف من الدرس :

تعريفك ببعض طرق العدّ المركب و بمنشور ثنائي الحد بشكله العام.

المدة اللازمة لدراسة : 08 ساعات.

الدروس التي ينبغي الرجوع إليها :

1 – حسابات العاملي المقرّرة في السنة الأولى ثانوي

2 – درس البرهان بالتراجع في أوّل هذه السلسلة

المراجع الخاصة بهذا الدرس :

كتاب الرياضيات 3 ث/ع + ر. المعهد التربوي الوطني

تصميم الدرس

1 – تعاريف وأمثلة.

2 – التراتيب.

3 – التباديل.

4 – التوافيق.

5 – دستور ثنائي الحد (نيوتن/ Binome de Newton).

6 – تمارين التصحيح الذاتي.

7– الأجوبة.

1 – تعاريف وأمثلة :

1 – 1 – تعريف :

نسمي أصلي المجموعة **س** عدد عناصرها ونرمز له بالرمز : ص (**س**).

1 – 2 – تعريف :

نرمز لمجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة بين الواحد وعددًا هـ بالمجال [1، هـ]

1 – 3 – تعريف :

ليكن ن عددًا طبيعيًا، نسمي عاملي ن، ونكتب : ن! العدد المعرّف بالعلاقتين :

$$\begin{cases} 0! = 1 & \text{إصطلاحا} \\ (\text{ن}+1)! = \text{ن}! \; (\text{ن}+1) & \end{cases}$$

وبالتدريج يمكن أن نبرهن أن : ن! = ن (ن – 1) (ن – 2)× ..... 3×2 × 1 .

1 – 4 – مثال :

نريد اختيار رئيس لقسم مدرسي يحتوي على 40 تلميذًا. فبكم طريقة يتم هذا الاختيار؟

لاحظ أن كل تلميذ هو إمكانية ممكنة للآختيار.

لذا نستطيع أن نختار بأربعين طريقة.

1 – 5 مثال :

نريد اختيار ثلاثة عناصر مرتبة من مجموعة ذات خمسة عناصر ولتكن **س** = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 }. فما هو عدد الطرق الممكنة لهذا الاختيار؟

* نستطيع اختيار العنصر الأول بخمسة طرق ممكنة كما وجدنا في المثال 1– 4.

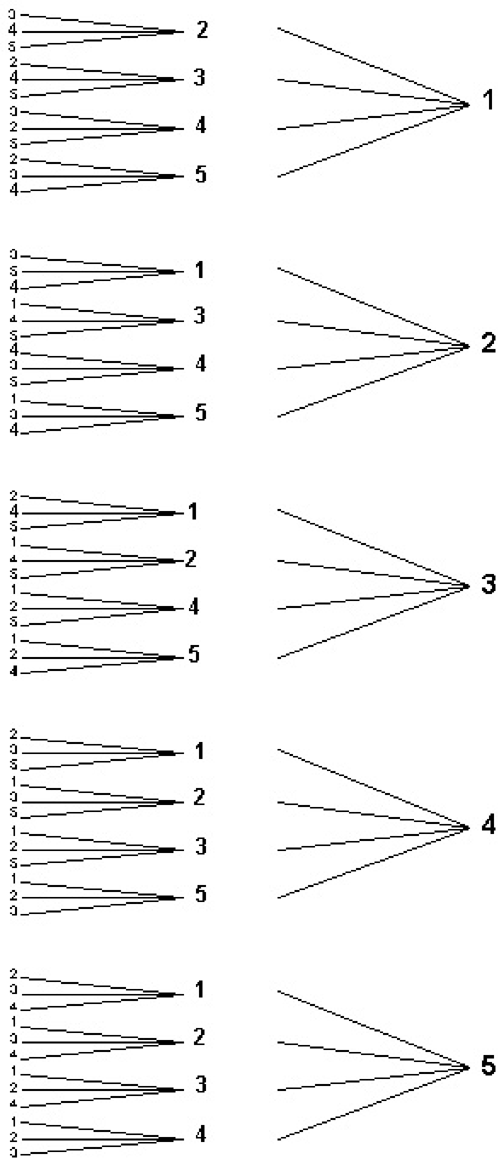
ونستطيع اختيار العنصر الثاني بأربعة طرق وكذا العنصر الثالث بثلاثة طرق.

وبمتابعة الشكل التوضيحي الموجود في الصفحة الموالية تجد 60 طريقة لهذا الاختيار وهي ناتجة من ضرب عدد إمكانيات اختيار العنصر الأول في عدد إمكانيات اختيار العنصر الثاني في عدد إمكانيات إختيار العنصر الثالث.

أي : 5 × 4 × 3 = 60.

أعد السؤال من أجل اختيار أربعة عناصر من مجموعة ذات ستّة عناصر.

الرسم التخطيطي لحل المثال 1 – 5 :



سنحاول فيما يلي إيجاد قاعدة عامة لحساب طرق مثل هذه الاختيارات في أية مجموعة منتهية.

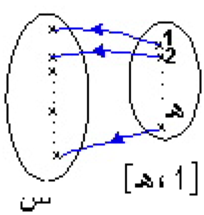
2 – التراتيب :

2 – 1 – تعريف :

لتكن **س** مجموعة منتهية حيث ص (**س**) = ن.
نسمّي ترتيبة من هـ عنصر للمجموعة **س** كل تطبيق متباين للمجموعة [1 ، هـ] في المجموعة.

المطلوب هو أن نختار من المجموعة **س** هاء عنصرًا مرتبًا ثم حساب عدد هذه التراتيب (التباينات) للمجموعة [1 ، هـ] في المجموعة **س**. نرمز لهذا العدد بالرمز : $ز_{ن}^{هـ}$ و نقرأ : عدد تراتيب هـ عنصرًا من مجموعة فيها ن عنصر.

• إذا كان : ن < هـ.
فالمسألة مستحيلة لأن عدد الأسهم الخارجة من مجموعة البدء يفوق عدد عناصر مجموعة الوصول .
فلن يكون التطبيق متباينًا .

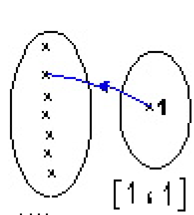


إذن : إذا كان : ن < هـ فإن $ر_{ن}^{هـ} = 0$.

لاحظ أن : $ر_{7}^{2} \neq 0$ بينما $ر_{5}^{6} = 0$

• إذا كان : هـ = 1 أي المجال [1 ، هـ] يحوي عنصرًا واحدًا فقط هو 1 فإننا نختار أي عنصر من **س** صورة للعدد 1 ويتم ذلك بـِ : ن طريقة (كما في المثال 1 – 4) .

إذن : ∀ ن ∈ ط* : $ر_{ن}^{1} = نَ$



2 – 2 - نظرية :

عدد تراتيب هاء عنصرًا من مجموعة **س** ذات ن عنصرًا هو جداء الأعداد الطبيعية من ن إلى (ن − هـ + 1)

أي : ∀هـ : 1 ≤ هـ ≤ ن : $ر_{ن}^{هـ}$ = ن (ن − 1) (ن − 2)...×..×(ن −هـ +1).

برهان النظرية 2 – 2 : (بالاعتماد على التراجع).

* من أجل هـ = 1 نجد أن : $ر_{ن}^{1}$ = ن محققة (جداء الأعداد من ن إلى نفسه).

* نفرض صحتها من أجل هـ ونبرهن صحتها من أجل هـ + 1 أي :

المطلوب برهان المساواة : $ر_{ن}^{هـ+1}$ = ن (ن –1)×...×(ن– هـ + 1) (ن – هـ).(*)

علمًا أن : $ر_{ن}^{هـ}$ = ن (ن – 1) × ....×(ن – هـ + 1)

لنضع ك = [1 ، هـ] ، ل = [1 ، هـ + 1] ولنحسب عدد التباينات من ل في **س**. فإذا كان : تا : ك ← **س** تباينًا.

نفرض تمديدًا له إلى المجموعة ل بأخذ صورة للعنصر : هـ + 1.

ونرمز لهذا التمديد تاَ أي : تاَ : ل← **س** ويكون تاَ تباينًا إذا تحقق شرطان هما :

1 – تا : ك ← **س** تباين.

2 – صورة العنصر (هـ + 1) لا تنتمي إلى المجموعة تا (ك)

أي تاَ (هـ + 1) ∈ [**س** – تا (ك)]

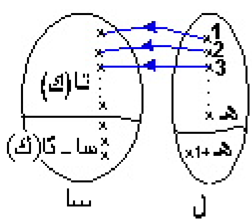
ويتم ذلك بِ : (ن – هـ) طريقة .

إذن :

مقابل تا متباين لدينا : ن – هـ طريقة

لجعل تاَ تباين أي مقابل $ر_{ن}^{هـ}$ تباين

يكون لدينا س طريقة لجعل تاَ تباين .



وحسب التباين فإن :

س = $ر_{ن}^{هـ}$. (ن – هـ). أي :

$ر_{ن}^{هـ+1}$ = $ر_{ن}^{هـ}$. (ن – هـ)

ولنعوض $ر_{ن}^{هـ}$ بقيمتها نجد : $ر_{ن}^{هـ+1}$ =ن(ن−1)(ن −2)× ... × (ن−هـ +1) (ن−هـ)

الخلاصة :

* إذا كـان ن < هـ فـإن $ر_{ن}^{هـ} = 0$.

* إذا كان : $1 \leq هـ \leq ن$ فـإن : $ر_{ن}^{هـ} = ن\,(ن - 1) \times \ldots \times (ن - هـ + 1)$

مـثـال :

$ر_{5}^{3} = 5 \times 4 \times 3 = 60$ $\qquad$ $ر_{9}^{3} = 9 \times 8 \times 7 = 504$

2 – 3 – شكـل آخـر لـدسـتـور حـسـاب الـتـراتـيـب :

لنضـرب الـدسـتـور الـسـابـق بـسـطًـا ومـقـامًـا فـي (ن – هـ) ! فـنـجـد :

$$ر_{ن}^{هـ} = \frac{ن(ن-1)(ن-2) \times \ldots \times (ن - هـ + 1)(ن-هـ)!}{(ن-هـ)!} = \frac{ن!}{(ن - هـ)!}$$

إذن : $\forall$ هـ : $1 \leq هـ \leq ن$: $ر_{ن}^{هـ} = \frac{ن!}{(ن - هـ)!}$

* **حـالـة خـاصـة :** من أجل ن = هـ : $ر_{ن}^{ن} = \frac{ن!}{0!} = ن!$

مـثـال :

$$ر_{4}^{4} = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

3 – الـتـبـاديـل :

3 – 1 – تـعـريـف :

نـسـمـي كـل تـقـابـل لـمـجـمـوعـة مـنـتـهـيـة **س** فـي نـفـسـهـا تـبـديـلاً ونـرمـز لـمـجـمـوعـة الـتـبـاديـل بـالـرمـز : ل (**س**) أي : ل (**س**) = { تـا : **س** ← **س** / تـا تـقـابـل }

3 – 2 – مـثـال :

س = { 1 ، 2 ، 3 }. أوجد كل الـتـبـاديـل لـلـمـجـمـوعـة **س**.

نـحـاول إيـجـاد كـل الـتـقـابـلات بـتـبـديـل تـرتـيـب الـعـنـاصـر فـنـجـد :

$$\begin{pmatrix} 1،2،3 \\ 1،2،3 \end{pmatrix} ، \begin{pmatrix} 1،2،3 \\ 1،3،2 \end{pmatrix} ، \begin{pmatrix} 1،2،3 \\ 2،1،3 \end{pmatrix} ، \begin{pmatrix} 1،2،3 \\ 2،3،1 \end{pmatrix} ، \begin{pmatrix} 1،2،3 \\ 3،1،2 \end{pmatrix} ، \begin{pmatrix} 1،2،3 \\ 3،2،1 \end{pmatrix}.$$

إذن : تـوجـد سـتـة تـبـاديـل، ندعـو الأول منـها " الـتـبـديـل الـحـيـادي".

3 – 3 رموز :

نرمز لعدد تباديل المجموعة **س** ذات ن عنصر بالرمز $ل_{ن}$.

كما نعلم أن كل تباين من المجموعة **س** في نفسها يكون غامرًا (إذا كانت المجموعة منتهية). أي أن كل تباين يكون تقابلاً.

$$ل_{ن}=ر_{ن}^{ن}=ن!$$

الخلاصة :

عدد التباديل لمجموعة منتهية ما هو عاملي عدد عناصرها أي : $ل_{ن}=ن!$

4 – التوافيق :

4 – 1 تعريف :

لتكن **س** مجموعة، أصليها صـ (**س**) = ن، نسمّي توفيقة هاء عنصر من المجموعة **س** كل مجموعة جزئية من **س** مؤلفة من هاء عنصر.

4 – 2 حساب عدد التوافيق :

لنحسب عدد المجموعات الجزئية ذات هاء عنصر والتي يمكن تشكيلها من **س**. (مع العلم أننا في المجموعات لا نهتم بالترتيب) أي عدد التوافيق ذات هاء عنصر، نرمز لهذا العدد بالرمز $ق_{ن}^{هـ}$ ونقرأ عدد توافيق هاء عنصر مأخوذة من نون عنصر.

- إذا كان : ن < هـ فإن : $ق_{ن}^{هـ}=0$ (إذا لا توجد مجموعة جزئية عدد عناصر أكبر من ن مأخوذة من **س**) .

مثال : $ق_{6}^{7}=0$.

- إذا كان : هـ = 0، فإنه توجد مجموعة جزئية وحيدة عدد عناصرها صفر هي المجموعة الخالية.إذن $ق_{ن}^{0}=0$

- إذا كان : هـ = 1 ، فإن كل مجموعة وحيدة العنصر وجزئية من **س** تشكل توفيقية ، أي يوجد ن توفيقية إذن : $ق_{ن}^{1}=ن$.

- **الحالة العامة :**

نلاحظ الفرق بين التراتيب والتوافيق والمتمثل فيما يلي :

في الترتيبة نهتم بترتيب العناصر فيما بينها مثلاً :

الترتيبة (3 ، 2 ، 1) تختلف عن الترتيبة (3 ، 2 ، 1) . . . و هكذا .

– أما المجموعة الجزئية { 1 ، 2 ، 3 } فتعتبر توفيقة ذات ثلاثة عناصر و يمكن أن نشكّل منها 6 تراتيب بأخذ التباديل بين عناصرها وبصورة عامة فإنه يمكن تشكيل هـ! ترتيبة ذات هـ عنصر من كل توفيقة ذات هـ عنصر.

إذن : عدد التراتيب ذات هاء عنصر = عدد التوافيق ذات هاء عنصر في عدد التباديل لِهاء عنصر أي :

$$ر_{ن}^{هـ} = ق_{ن}^{هـ} \times هـ!$$

إذن : $\forall$ هـ ، ن $\in$ ط* : $1 \le$ هـ $\le$ ن : $ق_{ن}^{هـ} = \frac{ر_{ن}^{هـ}}{هـ!}$

4 – 3 مثال : أوجد عدد التوافيق ذات الأربعة عناصر والمأخوذة من المجموعة **س** = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 }

لحل : بالتعويض في الدستور السّابق :

$$ق_{9}^{4} = \frac{ر_{9}^{4}}{4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2} = 126.$$

4 – 4 - نتائج :

4 – 4 – 1 شكل آخر لدستور التوافق :

لدينا : $\forall$ هـ $\in$ ط* ، $1 \le$ هـ $\le$ ن $ق_{ن}^{هـ} = \frac{ر_{ن}^{هـ}}{هـ!}$

بضرب البسط والمقام في (ن – هـ) ! نجد :

$$ق_{ن}^{هـ} = \frac{ن(ن-1)(ن-2) \times \ldots \times (ن-هـ+1)(ن-هـ)!}{هـ!(ن-هـ)!} = \frac{ن!}{هـ!(ن-هـ)!}$$

إذن :

$$\forall \text{ هـ} \in \text{ط*} ،\ 1 \le \text{هـ} \le \text{ن فإن : } ق_{ن}^{هـ} = \frac{ن!}{هـ!(ن-هـ)!}$$

4 – 4 – 2 : لا حظ أن الدستور المحصّل عليه في 4 - 4 - 1 صحيح من أجل كل عدد هـ اختياري يحقق كونه محصورًا بين 1 وَ ن.

وبما أن : $1 \le$ ن – هـ $\le$ ن فإننا نستطيع تبديل هـ بِـ : ن – هـ في الدستور السّابق فنجد أن :

$$ق_{ن}^{ن-هـ} = \frac{ن!}{(ن-هـ)!\,[ن-(ن-هـ)]!} = \frac{ن!}{(ن-هـ)!\,هـ!} = ق_{ن}^{هـ}$$

إذن :

$$\boxed{ق_{ن}^{ن-هـ} = ق_{ن}^{هـ}}$$

يمكن الحصول على هذه النتيجة بالاعتماد على المجموعات ومتمّماتها إذ أن كل مجموعة جزئية ذات هـ عنصر توجد مقابلها مجموعة جزئية ذات (ن – هـ) عنصر متمّمتها. أي أن عدد المجموعات الجزئية ذات هاء عنصر يُساوي عدد المجموعات الجزئية ذات (ن – هـ) عنصر.

4 – 4 – 3 – مثال :

$ق_{9}^{2} = ق_{9}^{7}$ ، $ق_{ن}^{3} = ق_{ن}^{ن-3}$ ، $ق_{ن}^{1} = ق_{ن}^{ن-1} = ن$

وبشكل خاص : $ق_{ن}^{ن} = ق_{ن}^{0} = 1$ (توجد مجموعة جزئية وحيدة ذات ن عنصر هي المجموعة **س** نفسها) .

4 –4 – 4 – نتيجة :

برهن أن التوافيق المأخوذة من مجموعة **س** تحقق العلاقة : $ق_{ن}^{هـ} = ق_{ن-1}^{هـ-1} + ق_{ن-1}^{هـ}$

البرهان :

لنحسب الطرق الأيسر بالاعتماد على الدّستور 4 – 4 – 1.

$$ق_{ن-1}^{هـ-1} + ق_{ن-1}^{هـ} = \frac{(ن-1)!}{(هـ-1)!\,(ن-1-هـ+1)!} + \frac{(ن-1)!}{(ن-1-هـ)!\,هـ!}$$

$$= \frac{(ن-1)!}{(ن-هـ)!\,(هـ-1)!} + \frac{(ن-1)!}{(ن-هـ-1)!\,هـ!}$$

بضرب حدّي الكسر الأول في هـ وحدّي الكسر الثاني في (ن – هـ) ثم نوحدّ المقامات فينتج أن :

$$ق_{ن-1}^{هـ-1} + ق_{ن-1}^{هـ} = \frac{(ن-1)!\,(هـ+ن-هـ)}{(ن-هـ)!\,هـ!} = \frac{ن\,(ن-1)!}{(ن-هـ)!\,هـ!} = \frac{ن!}{(ن-هـ)!\,هـ!} = ق_{ن}^{هـ}$$

إذن :

$$\text{ق}_{\text{ن}-1}^{\text{هـ}-1} + \text{ق}_{\text{ن}-1}^{\text{هـ}} = \text{ق}_{\text{ن}}^{\text{هـ}}$$

هـذه المسـاواة هامـة يـمكـن بـرهـانـهـا إعـتـمـادًا عـلـى الـمـجـمـوعـات الـجـزئـيـة ذات هـ عـنـصـر والـمـجـمـوعـات الـجـزئـيـة ذات هـ − 1 عـنـصـر ثم الـربـط بـيـنـهـمـا.

4 − 5 − تـطـبـيـق : (مـثـلـث " بـاسـكـال " / Triangle de Pascal)

لنرسـم جـدولاً عـامًّا لـكـافـة الـتـوافـيـق الـمـمـكـنـة مـن أجـل أي قيمـتـين لـلـعـددين ن ، هـ واضعين العدد هـ أفقيا والعدد ن عموديـا.

ولـنـلاحـظ أن : $\text{ق}_{\text{ن}}^{\text{هـ}} = 0$ لـمَّـا هـ > ن.

ن \ هـ	0	1	2	3	4	......	هـ−1	هـ
0	ق_0^0	0	0	0	0	......	0	0
1	ق_1^0	ق_1^1	0	0	0	......	0	0
2	ق_2^0	ق_2^1	ق_2^2	0	0	......	0	0
3	ق_3^0	ق_3^1	ق_3^2	ق_3^3	0	......	0	0
4	ق_4^0	ق_4^1	ق_4^2	ق_4^3	ق_4^4	......	0	0
						......		
						......		
ن−1	$\text{ق}_{\text{ن}-1}^0$	$\text{ق}_{\text{ن}-1}^1$					$\text{ق}_{\text{ن}-1}^{\text{هـ}-1}$	$\text{ق}_{\text{ن}-1}^{\text{هـ}}$
ن	$\text{ق}_{\text{ن}}^0$	$\text{ق}_{\text{ن}}^1$					$\text{ق}_{\text{ن}}^{\text{هـ}-1}$	$\text{ق}_{\text{ن}}^{\text{هـ}}$

نـلاحظ فـي الـسـطـريـن الأخـيـريـن والـعـمـوديـن الأخـيـريـن أن الـحـد $\text{ق}_{\text{ن}}^{\text{هـ}}$ هـو مـجـمـوع الـحـديـن الـذي فـوقـه مـع الـمـجـاور لـهـذا الأخـيـر مـن الـيـمـيـن أي :

$$\text{ق}_{\text{ن}-1}^{\text{هـ}-1} + \text{ق}_{\text{ن}-1}^{\text{هـ}} = \text{ق}_{\text{ن}}^{\text{هـ}}$$

وهذا ما وجدناه في النتيجة 4 – 4 – 4 وهكذا نستطيع معرفة أرقام كل سطر بمعرفة السطر السابق والقيام بعملية الجمع المذكورة.

إذا عوّضنا التوافيق الموجودة في الجدول بقيمها نحصل على جدول عام ندعوه مثلث باسكال سنرى تطبيقاته في فقرة قادمة.

مثلث باسكال: (Triangle de Pascal)

								1
							1	**1**
						1	**2**	**1**
					1	**3**	**3**	**1**
				1	**4**	**6**	**4**	**1**
			1	**5**	**10**	**10**	**5**	**1**
		1	**6**	**15**	.	.	**6**	**1**
	1	**7**	**21**	.	.	.	**7**	**1**
1	**8**	**28**	.	.	.	.	**8**	**1**
.	.	.	.	.	.	.	.	.

5 – دستور ثنائي الحد :Formule du binôme

5 – 1 رموز :

لتكن $أ_1$ ، $أ_3$ $أ_2$ ، ..... $أ_ن$ عناصر من مجموعة ما عندئذ نرمز للمجموع م = $أ_1 + أ_2 + أ_3 + ... أ_ن$ بالرمز : $\sum_{\alpha=1}^{ن} أ_\alpha$ ، نسمي α دليل المجموع، علمًا أن المجموع لا يتعلق بالدّليل α ، لذا يمكن إختيار دليل آخر مثل β أي : $\sum_{\beta=1}^{ن} أ_\beta$

● **مثال :**

لقد برهنا بالتراجع أنه :

$\forall$ ن $\in$ ط فإن : $1 + 2 + 3 + ... + ن = \dfrac{ن\,(ن+1)}{2}$

لذا يمكن أن نكتب : $\sum_{\alpha=1}^{ن} \alpha = \dfrac{ن(ن+1)}{2}$

5 – 2 ملاحظة :

إذا وجد عامل مشترك في مجموع ما ، فإنه يمكن إخراجه خارج رمز المجموع $\sum$،

أي : $\sum_{\alpha=1}^{ن} ك.أ_{\alpha} = ك \sum_{\alpha=1}^{ن} أ_{\alpha}$.

5 – 3 نتائج :

لتكن مناشير ثنائي الحد من درجات مختلفة.

$\forall$ (س ، ع) $\in$ ح $\times$ ح (يمكن تعميم ذلك في أية حلقة تبديلية)

$$(س+ع)^1 = س + ع.$$

$$(س+ع)^2 = س^2 + 2 س ع + ع^2$$

$$(س+ع)^3 = س^2 + 3 س^2 ع + 3 س ع^2 + ع^3$$

$$(س+ع)^4 = س^4 + 4 س^3 ع + 6 س^2 ع^2 + 4 س ع^3 + ع^4.$$

– –

نلاحظ في هذه المناشير ما يلي :

1 – عدد الحدود في أي منشور يساوي الأس مضافا له العدد 1 (واحد).

2 – أن معاملي كل حدين متناظرين بالنسبة للحد الأوسط متساويين فالمعاملات في منشور $(س+ع)^4$ هي : 1 ، 4 ، 6 ، 4 ، 1 فهي متناظرة و متساوية بالنسبة للحد الأوسط 6.

3 – أن معاملات الحدود في أي منشور تطابق التوافيق المأخوذة في السّطر المناسب من مثلث " باسكال ". فمعاملات منشور $(س+ع)^4$ تقابل السّطر الرابع من الجدول الموجود في الفقرة 4 – 5 .

وهكذا فمن أجل المنشور العام $(س+ع)^ن$ ستكون المعاملات هي :

$ق_ن^0$ ، $ق_ن^1$ ، $ق_ن^2$ ، $ق_ن^3$ ، .... ، $ق_ن^هـ$ ، .... ، $ق_ن^{ن-1}$ ، $ق_ن^ن$.

4 – أن كل حد في هذه المناشير يبدأ بِ : س أسّ ن $(س^ن)$ثم ينقص أسّ س ويزداد أسّ ع حتى الحد الأقصى $ع^ن$. وبحيث يكون مجموع أس العاملين س و ع في أي حد مساوياً ن دوماً.

من الملاحظات السّالفة الذكر يمكننا استنتاج الصّيغة العامة لمفكوك $(س+ع)^ن$ وهي :

$$(س+ع)^ن = ق_ن^0 س^ن + ق_ن^1 س^{ن-1} ع^1 + ق_ن^2 س^{ن-2} ع^2 + \ldots + ق_ن^هـ س^{ن-هـ} ع^هـ$$

$+ \text{ق}_{\text{ن}}^{\text{هـ}+1} \text{س}^{\text{ن}-\text{هـ}-1} \text{ع}^{\text{هـ}+1} + \ldots + \text{ق}_{\text{ن}}^{\text{ن}-1} \text{س}^{1} \text{ع}^{\text{ن}-1} + \text{ق}_{\text{ن}}^{\text{ن}} \text{ع}^{\text{ن}}$

وباختصار يمكن أن نكتب :

$$\boxed{(\text{س}+\text{ع})^{\text{ن}} = \sum_{\text{هـ}=0}^{\text{ن}} \text{ق}_{\text{ن}}^{\text{هـ}} \ \text{س}^{\text{ن}-\text{هـ}} . \text{ع}^{\text{هـ}}}$$

ونظرًا لضخامة الإرسال نفضّل قبول هذا المنشور دون برهان ويمكن لِطُلاب القسم الرّياضي برهانه باستعمال البرهان بالتراجع.

5 – 4 نتيجة :

بما أن المنشور صحيح من أجل أي عددين صحيحين فإننا نستطيع تبديل ع بِـ (–ع) فنحصل على منشور $(\text{س}-\text{ع})^2$.

$(\text{س}-\text{ع})^{\text{ن}} = \text{ق}_{\text{ن}}^{0} \text{س}^{\text{ن}} - \text{ق}_{\text{ن}}^{1} \text{س}^{\text{ن}-1} \text{ع}^{1} + \ldots + (-1)^{\text{هـ}} \text{ق}_{\text{ن}}^{\text{هـ}} \text{س}^{\text{ن}-\text{هـ}} \text{ع}^{\text{هـ}} + \ldots + (-1)^{\text{ن}} \text{ق}_{\text{ن}}^{\text{ن}} \text{ع}^{\text{ن}}$.

أي أن :

$$\boxed{(\text{س}-\text{ع})^{\text{ن}} = \sum_{\text{هـ}=0}^{\text{ن}} (-1)^{\text{هـ}} \ \text{ق}_{\text{ن}}^{\text{هـ}} \ \text{س}^{\text{ن}-\text{هـ}} \ \text{ع}^{\text{هـ}}}$$

مثال :

أحسب $(\text{س}-\text{ع})^4$.

$$(\text{س}-\text{ع})^4 = \sum_{\text{هـ}=0}^{4} (-1)^{\text{هـ}} \ \text{ق}_{4}^{\text{هـ}} \ \text{س}^{4-\text{هـ}} . \text{ع}^{\text{هـ}}$$

$= (-1)^0 \text{ق}_4^0 \text{س}^4 \text{ع}^0 + (-1)^1 \text{ق}_4^1 \text{س}^{4-1} \text{ع}^1 + (-1)^2 \text{ق}_4^2 \text{س}^{4-2} \text{ع}^2 + (-1)^3 \text{ق}_4^3 \text{س}^{4-3} \text{ع}^3 + (-1)^4 \text{ق}_4^4 \text{س}^{4-4} \text{ع}^4$

$= \text{س}^4 - 4\text{س}^3 \text{ع} + 6\text{س}^2 \text{ع}^2 - 4\text{س} \ \text{ع}^3 + \text{ع}^4$.

6 - تمارين التصحيح الذاتي :

6 – 1 : بكم طريقة يمكن اختيار أربعة طلاّب من بين 29 طالب لكي يدرس كل واحد منهم تخصصًا من بين أربعة تخصصات مختلفة .

6 – 2 : تتكوّن مؤسسة إنتاجية من 12 عاملاً و 7 عاملات.

يراد تشكيل لجنة من 3 رجال وإمرأتين. فبكم طريقة يتمّ ذلك؟

6 – 3 : عند بائع 8 كرات حمراء ، 7 كرات سوداء، 5 كرات خضراء. بكم طريقة يمكن شراء 12 كرة في الحالات التالية ؟

1 – الكرات المختارة مؤلفة من لونين فقط .

2 – لكرات المختارة تشمل أربع كرات سوداء فقط.

3 – الكرات المختارة تشمل أربع كرات من كل لون.

4 – الكرات المختارة تشمل كرة حمراء على الأقل.

6 – 4 : باستعمال أرقام مناسبة في منشور : $\left(1+\text{س}\right)^{\text{ن}}$.

أحسب المجموع : م = $\sum_{\text{هـ}=0}^{\text{ن}} \text{ق}_{\text{ن}}^{\text{هـ}}$.

– برهن أن عدد المجموعات الجزئية التي أصليها فردي يساوي عدد المجموعات الجزئية التي أصليها زوجي

6 – 5 : بفرض ن ، هـ عددان طبيعيان ($\text{هـ} < \text{ن}$)

برهن أن : $\text{هـ}\ \text{ق}_{\text{ن}}^{\text{هـ}} = \text{ن}\ \text{ق}_{\text{ن}-1}^{\text{هـ}-1}$

7 – الأجوبة :

7 – 1 : علينا إختيار أربعة من 29 يشكل مرتّب لأن الاختصاصات مختلفة وهذا يعني عدد التراتيب لِ 4 من 69 أي : $\text{ر}_{29}^{4} = 29\times28\times27\times26 = 570024$ طريقة.

7 – 2 : في هذا الاختيار لا يهمّ التّرتيب لأن أعضاء اللجنة يشغلون نفس المهام.

لذا نختار 3 رجال من بين 12 بِـ : $\text{ق}_{12}^{3} = 220$ طريقة.

ونختار إمرأتين من بين 7 بِـ : $\text{ق}_{7}^{2} = 21$ طريقة.

فيكون عدد طرق إختيار 3 رجال وإمرأتين :

$\text{ق}_{12}^{3} \times \text{ق}_{7}^{2} = 4620$ طريقة .

7 – 3 : 1 – نختار اللّونين ثم نختار العدد المطلوب :

– من الأحمر والأسود، لدينا 15 كرة إذن : $\text{ق}_{15}^{12} = \dfrac{13\times14\times15}{2\times3} = 455$.

– من الأحمر والأخضر لدينا 13 كرة إذن : $\text{ق}_{13}^{12} = 13$.

– من الأسود والأخضر لدينا 12 كرة إذن : $\text{ق}_{12}^{12} = 1$.

عدد الحالات التي تكون فيها الكرات المختارة من لونين فقط هو :

$$ق_{15}^{12} + ق_{13}^{12} + ق_{12}^{12} = 455 + 13 + 1 = 469$$

2 – نختار الكرات السوداء من 7 والبقية من اللّونين الآخرين أي :

$$ق_{7}^{4} \times ق_{13}^{8} = 35 \times 1287 = 45045$$

3 – نختار 4 كرات من كل لون ونحسب جداء الحالات فنجد :

$$ق_{8}^{4} \times ق_{7}^{4} \times ق_{5}^{4} = 70 \times 35 \times 5 = 12250$$

4 - إن إختيار كرة حمراء على الأقل معناه إمّا واحدة حمراء أو إثنتان حمراوان أو ثلاثة أو أربعة ... ، أو ثمانية حمراء و في كل حالة نختار البقية من العدد المتبقي أي من اللّونين الآخرين (الأسود والأخضر) إذن :

$$ق_{8}^{1} . ق_{12}^{11} + ق_{8}^{2} . ق_{12}^{10} + ق_{8}^{3} . ق_{12}^{9} + ق_{8}^{4} . ق_{12}^{8} + ق_{8}^{5} . ق_{12}^{7} + ق_{8}^{6} . ق_{12}^{6} + ق_{8}^{7} . ق_{12}^{5} + ق_{8}^{8} . ق_{12}^{4}$$

$$= 495 . 1 + 792. 8+ 924. 28+ 792. 56+ 495. 70 + 220. 56+ 66. 28+ 12. 8=$$

. 125969

ملاحظة :

عدد الاختيارات التي تكون فيها كرة حمراء على الأقل هو عدد الاختيارات الممكنة أي $ق_{20}^{12}$ الذي نطرح منه عدد الاختيارات التي لا توجد فيها أية كرة حمراء أي $ق_{12}^{12}$.

7 – 4 : لنكتب منشور $(1 + س)^{ن}$ حسب دستور ثنائي الحد .

$$\forall س \in ح : (1+س)^{ن} = ق_{ن}^{0} . 1 + ق_{ن}^{1} س + ق_{ن}^{2} . س^{2} + . . + ق_{ن}^{هـ} . س^{هـ} + . . + ق_{ن}^{ن} . س^{ن}$$

لنعوض في الطرفين س بـ 1 نجد :

$$(1+1)^{ن} = ق_{ن}^{0} + ق_{ن}^{1} + ق_{ن}^{2} + . . + ق_{ن}^{هـ} + . . + ق_{ن}^{ن}$$

$$2^{ن} = ق_{ن}^{0} + ق_{ن}^{1} + ق_{ن}^{2} + . . . + ق_{ن}^{هـ} + . . . + ق_{ن}^{ن}$$

إذن : $\sum_{هـ=0}^{ن} ق_{ن}^{هـ} = 2^{ن}$

لاحظ أن كل حد في المجموع أعلاه يُعبّر عن عدد من المجموعات الجزئية والمجموع هو كل المجموعات الجزئية للمجموعة التي أصليها ن.

2 – لنعوّض الآن س بـ : (– 1) في مفكوك $(س + 1)^{ن}$ فنجد:

$$(1-1)^{ن} = ق_{ن}^{0} - ق_{ن}^{1} + ق_{ن}^{2} - ق_{ن}^{3} + . . + (-1)^{ن} . ق_{ن}^{ن}$$

$$0 = ق_{ن}^{0} - ق_{ن}^{1} + ق_{ن}^{2} - ق_{ن}^{3} + . . + (-1)^{ن} . ق_{ن}^{ن}$$

وبنقل الحدود السّالبة لطّرف الأيمن نجد :

$$\text{ق}_{\text{ن}}^{1}+\text{ق}_{\text{ن}}^{3}+\,.\,.+\text{ق}_{\text{ن}}^{2\alpha+1}+\,.\,.=\text{ق}_{\text{ن}}^{0}+\text{ق}_{\text{ن}}^{2}+\text{ق}_{\text{ن}}^{4}+\,.\,.+\text{ق}_{\text{ن}}^{2\alpha}+\,.\,.$$

ومنه نستنتج أن : عدد المجموعات الجزئية التي أصليها زوجي والمأخوذة من مجموعة **س** ذات ن عنصر تساوي عدد المجموعات الجزئية التي أصليها فردي والمأخوذة من مجموعة س ذات ن عنصر.

5 – باستخدام الدّستور 4 – 4 – 1 وحساب الطرفين يمكن التحقّق من المساواة.

$$\text{هـ}\,.\,\text{ق}_{\text{ن}}^{\text{هـ}}=\text{هـ}\,.\,\frac{\text{ن}!}{\text{هـ}!\,(\text{ن}-\text{هـ})!}=\frac{\text{ن}!\ \text{هـ}}{\text{هـ}\,(\text{هـ}-1)!\,(\text{ن}-\text{هـ})!}=\frac{\text{ن}!}{(\text{هـ}-1)!\,(\text{ن}-\text{هـ})!}$$

$$\text{ن}\,.\,\text{ق}_{\text{ن}-1}^{\text{هـ}-1}=\text{ن}\,.\,\frac{(\text{ن}-1)!}{(\text{هـ}-1)!\,(\text{ن}-1-\text{هـ}+1)!}=\frac{\text{ن}!}{(\text{هـ}-1)!\,(\text{ن}-\text{هـ})!}$$

إذن الطرفان متساويان ومنه : $\text{هـ}\,.\,\text{ق}_{\text{ن}}^{\text{هـ}}=\text{ن}\,\text{ق}_{\text{ن}-1}^{\text{هـ}-1}$

فهرس السلسلة 3

تتضمن هذه السلسلة ثلاثة دروس هي :

* الأعداد الصحيحة والقسمة.

* الموافقات في ص

* مجموعة حاصل القسمة $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$

الأعداد الصحيحة والقسمة

الهدف (الأهداف) من الدرس :

*مراجعة خواص العمليات والترتيب في ص

* معرفة خواص المضاعفات والقواسم وخاصة ال ق . م . أ وال . م . م . أ .

* التمكّن من استعمال هذه الخواص في حل مسائل حسابية أو معادلات أو جملة معادلات في ط أو في ص.

*التعرف على بعض النظريات الهامة في علم الحساب والخاصة بالأعداد الأولية فيما بينها وكيفية استغلالها في تبسيط المسائل الحسابية.

* التعرف على مجموعة الأعداد الأولية والنظرية الأساسية المتعلق بتحليل الأعداد الطبيعية إلى جداء عوامل لأولية بطريقة وحيدة .

استخلاص بعض النتائج الهامة من التحليل الوحيد إلى جداء عوامل أولية والتّمرن على استغلالها في حل مسائل حسابية.

المدة اللازمة لدراسته : 08 ساعة.

الدروس التي ينبغي الرجوع إليها : خواص القسمة الاقليدية والترتيب فيط .

المراجع الخاصة بهذا الدرس : كتاب الرياضيات 3 ث/ع +رالمعهد التربوي الوطني.

تصميم الدرس

تمهيد.

1 – خواص الحلقة المرتبة (ص، + ،× ، ≥)

2 – القواسم والمضاعفات (القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر).

3 – الأعداد الأولية فيما بينها .

4 – الأعداد الأولية.

5 – تمارين التصحيح الذاتي.

6 – أجوبة التصحيح الذاتي

تمهيد :

إن معالجة مسائل حسابية مثل :

– تعيين مقاس علبة مكعبة بحيث يمكن ملؤها بصفة مضبوطة بعلب كبريت.

– مقاساتها : 8 سم × 5 سم × 3 سم.

– تعيين أكبر مقاس ممكن لقطع صابون مكعبة يمكن بواسطتها ملء صندوق مقاساته : 48 سم × 84 سم × 60 سم بصفة مضبوطة.

ومعالجة مسائل أخرى تتعلق بالقواسم والمضاعفات لأعداد طبيعية أو صحيحة تقتضي دراسة خواص القسمة وقابلية القسمة في ط وفي ص.

ولا يمكن أن تتم هذه الدراسة بدون التطرق إلى الأعداد الأولية فيما بينها والأعداد الأولية وخاصة التحليل إلى جداء عوامل أولية نظرًا لدورها الأساسي في عالم الحساب.

1 – خواص الحلقة المرتبة (ص ، + ، × ، ≤) . (تذكير) :

1 – 1 الحلقة (ص ، + ، ×).

* (ص، +) زمرة تبديلية .

* العملية " × " داخلية فيص، تجميعية، تبديلية وتوزيعية بالنسبة للجمع (+) وتقبل الواحد " 1 " عنصرا حياديًا. نقول أن الحلقة (ص، + ، ×) واحدية تبديلية وبالإضافة إلى ذلك فإن :

∀ (أ ، ب) ∋ ص ^{2} : أ × ب = 0 ⇐ أ = 0 أو ب = 0.

فنقول إن الحلقة (ص، + ، ×) تامة.

ملاحظة :

ليكن أ ∋ ص*، نقول أن العنصر أ قابل للقلب إذا كان له نظير بالنسبة لعملية الضرب (×) والعناصر القابلة للقلب فيص* هي : – 1 ، + 1

1 – 2 – خواص العلاقة (≤) **في ص** :

1 – 2 – 1 – العلاقة (≤) تعرّف فيص ترتيبًا كليًا أي :

∀ (أ ،ب، جـ) ∋ص ^{3} يكون لدينا :

* أ ≤ أ (خاصية الانعكاسية).

* (أ ≤ ب وَ ب ≤ أ) ⇐ أ = ب (خاصية ضد التناظرية)

* ($ا \geq$ ب وَ ب $\geq$ جـ) $\Leftarrow$ ا $\geq$ جـ (خاصية التعدي)

* ا $\geq$ ب أوَ ب $\geq$ ا (شرط الترتيب الكلي)

1 – 2 – 2 –$\forall$ (ا ، ب جـ) $\in$ ص^3 فإن :

ا $\geq$ ب $\Leftrightarrow$ ا + جـ $\geq$ ب + جـ.

(ا $\geq$ ب و جـ $\geq$ د) $\Leftarrow$ ا + جـ $\geq$ ب + د

ملاحظة : لا يمكن طرح متباينتين، هذا يعني أن الاستلزام : (ا $\geq$ ب و جـ $\geq$ د) $\Leftarrow$ ا – جـ $\geq$ ب – د خاطيء

(خذ مثلاً : ا = 2 ، ب = 3 ، جـ = 5 ، د = 0)

1 – 2 – 3 : $\forall$ (ا ، ب جـ) $\in$ ص^3 فإن :

(ا $\geq$ ب وَ جـ $\leq$ 0) $\Leftarrow$ ا جـ $\geq$ ب جـ

(ا $\geq$ ب وَ جـ $\geq$ 0) $\Leftarrow$ ا جـ $\leq$ ب جـ

$\forall$ (ا ، ب جـ) $\in$ ص$^3_+$ فإن : (ا $\geq$ ب وَ جـ $\geq$ د) $\Leftarrow$ ا جـ $\geq$ ب د

الحلقةص أرخميدية أي :

($\forall$ ا $\in$ ط*) ($\forall$ ب $\in$ ص) (E ن $\in$ ط) (ن ا > ب)

مثلاً : ا = 3 ، ب = 1000 ، ن $\in$] 334 ، + ∞ [ ) .

1 – 2 – 4 خواص أجزاء ص :

* كل جزء منص غير خال ومحدود من الأعلى له عنصر أكبر.

- كل جزء منص غير خال ومحدود من الأسفل له عنصر أصغر .

2 ـ القواسم والمضاعفات :

2 – 1 – خواص عامة للقواسم والمضاعفات :

2 – 1 – 1 – تعريف :

نقول عن عدد صحيح ا أنه مضاعفا لعدد صحيح آخر إذا وفقط إذا وجد ك فيص بحيث يكون : ا = ب × ك . إذا كان ب غير معدوم نقول أيضًا إن ب قاسم لـِ ا أو ب يُقسّما ونكتب : ب / ا.

أمثلة :

مضاعفات العدد 3 هي : . . . . ، 9 ، 6 ، 3 ، 0 ، – 3 ، – 6 ، – 9 ، ......

قواسم العدد 36 هي : 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 6 ، 9 ، 12 ، 18 ، 36 ، ، − 1 ، − 2 ، − 3 ، − 4 ، − 6 ، − 9 ، − 12 ، − 18 ، − 36 .

1 – 2 : ملاحظات : + 1 ، 1 قاسمان لكل عدد صحيح .

إذا كان ؟ مضاعفا لِ ب فإن :

− ؟ مضاعفا لِ ب ، − ؟ مضاعف لِ − ب

− ب قاسم لِ ؟ ، − ب قاسم لِ − ؟

الملاحظة الأخيرة تقودنا إلى حصر دراسة المضاعفات والقواسم المجموعة ط، إذا لا تأثير للآشارة على قابلية القسمة.

1 – 3 الترميز :

* نرمز لمجموعة القواسم الموجبة للعدد ن بالرمز : ق (ن).

* نرمز لمجموعة المضاعفات الموجبة للعدد ن بالرمز : م (ن).

أمثلة :

* م (3) = { 0 ، 3 ، 6 ، 9 ، ... ، ... ، 3 ك ، ... ، ...}

= { س ∈ ط / س = 3 ك وَ ك ∈ ط }

* ق (36) { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 6 ، 9 ، 12 ، 18 ، 36 }

تمرين : عين ق (54)

الحل :

$54 = 1 \times 54 = 2 \times 27 = 3 \times 18 = 6 \times 9$

إذن ق (54) = { 1 ، 2 ، 3 ، 6 ، 9 ، 18 ، 27 ، 54 }

2 – 1 – 4 المضاعفات والقواسم المشتركة لعددين أو أكثر:

أمثلة :

* م (9) = {0 ، 9 ، 18 ، 27 ، 36 ، ...... ، 9 ك ،....}

م (12) = { 0 ، 12 ، 24 ، 36 ،...... ، 12 ك ، . . . }

المضاعفات المشتركة للعددين : 9 ، 12 هي عناصر المجموعة :

م (9) ∩ م (12) = { 0 ، 36 ، ....}

* ق (54) = { 1 ، 2 ، 3، 6 ، 9 ، 18 ، 27 ، 54 }

* ق (45) = { 1 ، 3 ، 5 ، 9 ،15 ، 45}

* ق (30) = { 1 ، 2 ، 3 ، 5 ، 6 ، 10 ، 15 ، 30 }

القواسم المشتركة للأعداد : 54 ، 45 ، 30 هي عناصر

ق (54) $\bigcap$ ق (45) $\bigcap$ ق (30) = { 1 ، 3 }

2 – 1 – 5 – خواص المضاعفات والقواسم :

2 –1 – 5 – 1 – مجموع أو فرق أو جداء مضاعفين لعدد صحيح مفروض هو مضاعف لهذا العدد.

2 –1 – 5 – 2 – كل مضاعف لمضاعف عدد صحيح هو نفسه مضاعفاً لهذا العدد الصحيح.

2 – 1 – 5 – 3 – إذا كان ا وَ ب عددين صحيحين وكان : ا مضاعف لِ ب وَ ب مضاعفا لِ ا فإن : |ا| = | ب| .

2 – 1 – 5 – 4 – كل قاسم لقاسم عدد صحيح هو نفسه قاسم العدد الصحيح.

2 – 1 – 5 – 5 – إذا قسّم عدد صحيح ا عددًا صحيحا آخر ب وكان ب يُقسّم ا فإن : |ا| = | ب| .

2 – 1 – 5 – 6 – كل قاسم مشترك لعددين صحيحينا ، ب يُقسّم كل عدد صحيح من الشكل : ف = ا س + ب ع / (س ، ع) ∍ ص^2

البرهان :

2 – 1 – 5 – 1 : ليكن العدد الصحيحا و ليكن : ك ا ، ن ا مضاعفين له

* ك ا + ن ا = (ك + ن) ا (المجموع)

* ك ا – ن ا = (ك – ن) ا (الفرق)

* ك ا × ن ا = (ك × ن × ا) ا (الجداء)

2 – 1 – 5 – 2 : ا مضاعف لِ ب ⇔ E ك ∍ ص/ ا = ك ب.

ب مضاعف لِ جـ ⇔ E هـ ∍ ص/ ب= هـ جـ.

ا = ك ب = ك (هـ . جـ) = (ك . هـ). جـ

إذن : ا مضاعف لِ جـ.

2 – 1 – 5 – 3 : ا مضاعف لِ ب E ك ∍ ص / ا = ك ب.

ب مضاعف لِ ا ⇔ E هـ ∍ ص/ ب= هـا.

ا = ك ب = ك (هـ ا) = (ك هـ)ا

إذن : ك هـ = 1 أي : |ك هـ| = |ك| . | هـ| = 1

أي أن : |ك| = 1 وَ | هـ| = 1

ولـكـن : ٲ = ك ب فـيـكـون : |ٲ| = |ك| . | ب| = |ب|

2 – 1 – 5 – 4 : إذا كـان ٲ / ب وَ ب / جـ هـذا مـعـنـاه :

ب مـضـاعـف لـِ ٲ وَ جـ مـضـاعـف لـِ ب.

فـحـسـب الـخـاصـيـة (2 – 1 – 5 – 2) يـكـون جـ مـضـاعـفاً لـِ ٲ

وبـمـا أن ٲ ≠ 0 (لأن ٲ / ب فـرضـا) فـإن ٲ يُـقـسّـم جـ

2 – 1 – 5 – 5 : بـنـفـس الـطـريـقـة الـسـابـقـة نـعـود لـلـمـضـاعـف ونـسـتـعـمـل الـخـاصـيـة (2 – 1 – 5 – 3)

2 – 1 – 5 – 6 : لـيـكـن ٲ ، ب عـددين صـحـيـحـيـن ، جـ قـاسـمًـا مـشـتـركًـا لـهـمـا ولـيـكـن :

ف = ٲ س + ب ع / (س ، ع) ∋ ص^2 .

جـ / ٲ ⇔ E ك ∋ ص/ ٲ = ك جـ

جـ / ب ⇔ E هـ ∋ ص/ ب= هـ جـ.

ف = ٲ س + ب ع = (ك . جـ) س + (هـ . جـ) ع

= (ك س + هـ ع) جـ

أي أن : جـ / ف

2 – 2 – الـمـضـاعـف الـمـشـتـرك الأصـغـر والـقـاسـم الـمـشـتـرك الأكـبـر :

2 – 2 – 1 تـعـريـف و نـظـريـة :

من أجـل كـل عـدديـن طـبـيـعـيـيـن غـيـر مـعـدومـيـن ٲ ،ب يـوجـد عـدد طـبـيـعـي وحـيـد يـرمـز لـه : م . م . أ (ٲ، ب) وهـو أصـغـر الـمـضـاعـفـات الـمـشـتـركـة لـلـعـدديـنٲ ، ب.

الـبـرهـان :

ٲ ∋ ط* ، ب ∋ ط* إذن : م (ٲ) ⊂ ط وَ م (ب) ⊂ ط

فـتـكـون : م (ٲ) ⋂ م (ب) ⊂ ط

ونـعـلـم أن كـل جـزء مـن ط غـيـر خـالٍ لـه أصـغـر عـنـصـر وهـو أصـغـر الـمـضـاعـفـات الـمـشـتـركـة لـلـعـدديـنٲ ، ب .

* **الـتـرمـيـز** : يـرمـز أحـيـانًا لـلـمضـاعف الـمـشـتـرك الأصـغـر بـالـرمـز " ∨ "

أي : ٲ ∨ ب = م . م . أ (ٲ ب)

مـثـال : م . م . أ (12 ، 9) = 36 فـنـكـتـب : 12 ∨ 9 = 36

مـلاحـظـة :

ينتج من التعريف ومن خواص العملية $\cap$ أن العملية" $\vee$" داخلية ، تجميعية وتبديلية . فهل لها عنصر حيادي ؟

2 - 2 - 2 - نظرية :

مجموعة المضاعفات المشتركة لعددين طبيعيين هي مجموعة مضاعفات الـ م . م . أ لهما.

البرهان :

* أ $\vee$ب هو مضاعف لِ أ و مضاعف لِ ب

فكل مضاعف لِ أ $\vee$ ب هو مضاعف لِ أ ومضاعف لِ ب

ومنه : كل عنصر من المجموعة م (أ $\vee$ ب) هو كذلك عنصر في المجموعة م (أ) $\cap$ م (ب).

* والعكس لنبرهن على أن كل مضاعف مشترك لِأ ، ب هو مضاعف لِم . م . أ (أ ، ب) لنستعمل البرهان بالخلف :

نفرض أنه يوجد مضاعف مشترك لِ أ ، ب غير معدوم وهو ن بحيث لا يكون مضاعفًا لِ م . م . أ (أ ، ب) الذي سنرمز له " م ". كون ن مضاعفًا لـِ أ ومضاعفًا لـِ ب يعني أنه يوجد $(\alpha,\beta) \in$ ط* × ط* بحيث : ن = αأ وَ ن =β ب

* إذا كان : ن < م فإن م ليس هو المضاعف المشترك الأصغر .

* إذا كان : ن > م فإننا نُقسّم ن على م فيكون لدينا :

ن = ك م + ق / 0 < ق < م.

(ق $\neq$ 0 لأن ن ليس مضاعفًا لِ م) .

ومنه ق = ن – ك م .

نستنتج من هذه المساواة أن ق هو فرق مضاعفين مشترك لـِ أ ، ب فيكون ق مضاعفًا مشتركاً لِ أ ، ب وَ ق < م

إذن ليس م هو م . م . أ (أ ، ب). فالنتيجة تناقض الفرض.

مثال :

المضاعفات المشتركة للعددين 9 ، 12 هي مضاعفات الـ م . م . أ لهما أي : م (9) $\bigcap$ م (12) = م (9 $\vee$ 12) = م (36) .

2 – 2 – 3 نظرية :

إذا ضرب عددان طبيعيان أ ، ب في نفس العدد الطبيعي الغير معدوم ك فإن الـ م . م . أ لهما يضرب في نفس العدد ك أي :
∀ (أ ، ب ، ك)∋ ط* × ط* × ط* : ك أ ∨ك ب = ك (أ ∨ ب).

مثال : $27 \vee 36 = (3 \cdot 9) \vee (3 \cdot 12)$

$$= 3\,(9 \vee 12) = 3 \cdot 36 = 108$$

البرهان : نضع : م = ن أ ∨ ن ب ، أ ∨ ب = مَ

مَ = أ ∨ ب يعني أنه يوجد (α,β) ∋ ط* × ط* بحيث :

مَ = αأ و مَ = β ب .

م = نأ ∨ ن ب يعني أنه يوجد (ك ، ل)∋ ط* × ط* بحيث :

م = ك نأ وَ م = ل ن ب

* لنبين الآن أن : ن مَ هو مضاعف لِ م

ن مَ = ن (α أ) = α (ن × أ) وَ ن مَ = ن (β ب) = β (ن ب)

مما يدل على أن : ن مَ هو مضاعف مشترك لِ : نأ ، ن ب . ومنه فهو مضاعف لِ ن أ ∨ ن ب أي مضاعف لِ م

* لنبين الآن أن م هو مضاعف لِ ن مَ

م = ك (نأ) = ل (ن ب) = ن (كأ) = ن (ل ب)

فنستنتج أن : كأ = ل ب.

العدد كأ أو ل ب هو مضاعف مشترك لِ أ ، ب فهو مضاعف لِ أ ∨ب أي مضاعف لِ : مَ.

لنضع ك أ = ل ب = هـ مَ فيكون :

ن (ك أ) = ن (ل ب) = ن هـ مَ = هـ (ن مَ)

أي : م = (هـ ن) مَ = هـ (ن مَ)

إذن م مضاعف لِ ن مَ

ومن الحالتين نستنتج أن م = ن مَ . (حسب الخاصية 2 . 1 . 5 . 3).

2 – 2 – 4 – نتيجة :

إذا قُسّم عددان طبيعيان أ ، ب على أحد قواسمهما المشتركة ق فإن الـ م . م . أ لهما يُقسم على نفس العدد ق أي : (ق / أ وَ ق / ب) $\Leftarrow \frac{أ}{ق} \vee \frac{ب}{ق} = \frac{أ \vee ب}{ق}$

مثال : $15 \vee 12 = 60$ ، $\frac{15}{3} \vee \frac{12}{3} = 5 \times 4 = 20 = \frac{15 \vee 12}{3} = \frac{60}{3}$

2 – 3 – القاسم المشترك الأكبر :

2 – 3 – 1 – تعريف و نظرية :

من أجل كل عددين طبيعيين غير معدومين أ، ب يوجد عدد طبيعي و حيد يرمز له : ق . م . أ (أ ، ب) وهو أكبر القواسم المشترك للعددين أ ، ب

مثال : ق (36) = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 6 ، 9 ، 12 ، 18 ، 36 }

ق (45) = { 1 ، 3 ، 5 ، 9 ، 15 ، 45 }

ق (36) $\cap$ ق (45) = { 1 ، 3 ، 9 }

ق . م . أ (36 ، 45) = 9

البرهان :

من أجل كل عددين : أ ، ب فإن : ق (أ) $\cap$ ق (ب) $\neq \varnothing$

لأن : 1 $\in$ ق (أ) $\cap$ (ب)

بالإضافة إلى أن ق (أ) $\cap$ ق (ب) محدودة من الأعلى (أ ، ب ، هما حادّان من الأعلى).

نستنتج أن هذا الجزء من ط يقبل عنصرًا أكبر هو : ق . م .أ (أ ، ب)

ملاحظة : يُرمز أحيانًا للقاسم المشترك الأكبر للعددين أ ، ب بالرمز : أ $\wedge$ ب . وهكذا نتحقق بسهولة أن العملية " $\wedge$ " تبديلية وتجميعية فهل تقبل عنصرًا حياديًا ؟

2 – 3 – 2 نظرية :

مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين أ ، ب هي مجموعة قواسم الـ ق . م. أ لهما أي :

ق (أ) $\cap$ ق (ب) = ق (أ $\wedge$ ب).

مثال : ق (36) = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 6 ، 9 ، 12 ، 18 ، 36 }

ق (84) = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 6 ، 7 ، 12 ، 14 ، 21 ، 28 ، 42 ، 84 }

ق (36) $\cap$ ق (84) = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 6 ، 12 }
ق . م . أ (36 ، 84) = 12.
ق (12) = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 6 ، 12 } = ق (36) $\cap$ ق (84).

البرهان :

* إذا كان : أ = ب فإن : أ $\wedge$ ب = أ = ب.

ق (أ) $\cap$ ق (ب) = ق (أ) = ق (أ $\wedge$ ب)

* إذا كان : أ $\neq$ ب (نعتبر أن أ هو أكبرهما).

فيكون لدينا : أ = ب ك + هـ / 0 $\leq$ هـ $<$ ب.

ومنه : أ – ب ك = هـ

كل قاسم مشترك لِـ أ ، ب يُقسّم أ ، ب ك فهو يُقسّم الفرق هـ = أ – ب ك .

إذن : إذا كان عدد قاسمًا مشتركًا لِـ أ ، ب فإنه قاسم مشترك لِـ ب ، هـ والعكس فكل قاسم مشترك لِـ ب ، هـ يُقسّم ب ، ب ك + هـ أي أ .

ومنه : ق (أ) $\cap$ ق (ب) = ق (ب) $\cap$ ق (هـ).

إذا كان هـ =0 يكون ق (ب) $\cap$ ق (هـ) = ق (ب) ومنه ق(أ) $\cap$ ق (ب) = ق(ب)

إذا كان هـ $\neq$ 0 نكرر العملية على ب ، هـ نتحصل على ب = هـ ك$_1$ + هـ$_1$ / هـ$_1$ $<$ هـ.

فيكون عندئذ لدينا حالتان :

إذا كان هـ$_1$ = 0 يكون ق (أ) $\cap$ ق (ب) = ق (ب) $\cap$ ق (هـ)

= ق (هـ) $\cap$ ق(هـ$_1$) = ق (هـ).

وَإذا كان هـ$_1$ $\neq$ 0 نكرر العملية على هـ ،هـ$_1$ نتحصل على هـ = هـ$_1$ك$_2$ + هـ$_2$ / هـ$_2$ $<$ هـ$_1$

فنتحصل على متتالية متناقصة من البواقي الصحية فيتحتّم الوصول إلى باق معدوم (هـ$_{ن+1}$) فتكون لدينا السلسلة الآتية من المساويات

ق(أ)$\cap$ق(ب)=ق(ب)$\cap$ق(هـ)=ق(هـ)$\cap$ق(هـ$_1$)=ق(هـ$_1$)$\cap$ق(هـ$_2$)

= ....= ق (هـ$_ن$) $\cap$ ق (0) = ق (هـ$_ن$).

لأن : (هـ$_{ن+1}$= 0)

القواسم المشتركة لـ أ ، ب هي قواسم $هـ_ن$ وأكبر هذه القواسم هو $هـ_ن$ نفسه الذي هو أكبر قاسم مشترك لـ أ ، ب تسمى هذه السلسلة ن العمليات التي تقودنا إلى حساب الـ ق . م . أ " خوارزمية إقليدس " (" **Algorithme d'Euclide** ")

2 – 3 – 3 – نظرية :

إذا ضُرب عددان طبيعيان أ ، ب في نفس العدد جـ، غير المعدوم فإن :
الـ ق . م .أ لهما يُضرب في نفس العدد جـ أي :

$$جـ أ \wedge جـ ب = جـ(أ \wedge ب).$$

مثال : $12 \wedge 15 = 3$.

$$36 \wedge 45 = (3 . 12) \wedge (3 . 15) = 3 . (12 \quad 15) \wedge = 3 . 3 = 9$$

* **البرهان :**

نستعمل " خوارزمية إقليدس " المذكورة سابقا (برهان 2 – 3 – 2) يكون لدينا :

أ = ب ك + هـ ومنه : جـ أ = (جـ ب) ك + جـ هـ.

$ب = هـ \; ك_1 + هـ_1$ ومنه : $جـ ب = (جـ هـ) \; ك_1 + جـ هـ_1$

$هـ = هـ_1 \; ك_2 + هـ_2$ ومنه : $جـ هـ = \left(جـ هـ_1\right) ك_2 + جـ هـ_2$

. . . .

$هـ_{ن-1} = هـ_ن . ك_{ن+1}$ ومنه : $جـ \; هـ_{ن-1} = \left(جـ \; هـ_ن \right) ك_{ن+1}$

ومنه : إذا كان : $هـ_ن = أ \wedge ب$ فإن $جـ \; هـ_ن = جـ أ \wedge جـ ب$.

وهذا معناه : جـ أ $\wedge$ جـ ب = جـ . (أ $\wedge$ ب) .

2 – 3 – 4 نتيجة :

إذا قُسّم عددان طبيعيات أ ، ب على أحد قواسمهما المشتركة جـ فإن الـ ق . م . أ لهما يُقسّم على نفس العدد جـ أي : (جـ / أ و جـ / ب) $\Leftarrow \frac{أ}{جـ} \wedge \frac{ب}{جـ} = \frac{أ \wedge ب}{جـ}$

* **البرهان :**

نضع Δ = أ $\wedge$ ب ، جـ قاسم مشترك لـ أ ، ب و َ أ = أَ جـ و َ ب = بَ جـ و َ δ = أَ $\wedge$ بَ

حسب النظرية السابقة يكون :

أ $\wedge$ ب = أَ جـ $\wedge$ بَ جـ = جـ (أَ $\wedge$ بَ) = جـ δ .

أي : $\Delta = \text{حـ} \cdot \delta$ فيكون : $\delta = \frac{\Delta}{\text{جـ}}$

وهذا يعني : $\frac{\text{أ}}{\text{جـ}} \wedge \frac{\text{ب}}{\text{جـ}} = \frac{\text{أ} \wedge \text{ب}}{\text{جـ}}$

2 – 3 – 5 حساب القاسم المشترك الأكبر :

* بتحليل كل من أ ، ب إلى جداء عوامل أولية حيث يكون : ق . م . أ (أ ، ب) هو جداء العوامل المشتركة مأخوذة بأصغر أس (وهذه الطريقة تستعمل مع أعداد أصغر من 1000 لأن التحليل يتطلب وقتا طويلاً)

مثال : $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$ ، $270 = 2 \times 3^3 \times 5$.

$504 \wedge 270 = 2 \times 3^2 = 18$.

* بإستعمال " خوارزمية إقليدس " :

مثال : أ = 504 ، ب = 270

النواتج		1	1	6	2
المقسوم والمقسوم عليه	504	270	234	36	18
البواقي		234	36	18	0

آخر باقي غير معدوم

$504 \wedge 270 = 18$

3 – الأعداد الأولية فيما بينها .

3 – 1 تعريف :

نقول عن عددين طبيعيين أ ، ب أنهما أوليان فيما بينهما (أو أن أ أولي مع ب) إذا كان القاسم المشترك الأكبر لهما هو 1 (وذلك يعني أن 1 هو القاسم المشترك الوحيد لهما).

مثال : 8 ، 15 أوليان فيما بينهما لأن : $8 \wedge 15 = 1$

10 ، 7 . . . . : $10 \wedge 7 = 1$.

3 – 2 – نظرية " بيزوت " : (Théorème de Bezout)

يكون العددان الطبيعيان أ ، ب أوليين فيما بينهما إذ و فقط إذا وُجد عددان صحيحان : و ، ي بحيث يكون : أ . و + ب . ي س = 1 .

* **مثال** : 8 ∧ 15 = 1 وَ (2) (8) + (− 1) (15) = 1.
أو(− 13) (8) + (7) (15) = 1.

ملاحظة :

ليست الثنائية (و ، ي) وحيدة، كما يؤكد ذلك المثال السّابق .

البرهان : نضع : ق = أ ∧ب

* لنفرض أنه يوجد عددان صحيحان و ، ي بحيث أ . و + ب .ي = 1 فحسب النظرية (2 – 1 – 5 – 6) كل قاسم مشتركة لِـ أ ، ب يُقسّم كل عدد صحيح من الشكل : أ س + ب ع

ومنه ق يُقسّم أ و + ب . ي .

ولكن أ . و + ب . ي = 1

إذن : ق / 1 أي ق = 1.

فالعددان أ ، ب أوليان فيما بينهما

* لنفرض الآن أن أ ، ب أوليين فيما بينهما ولنبرهن أنه يوجد عددان صحيحان و ، ي بحيث : أ . و + ب . ي = 1

– إذا كان : ب = 1 فإن أ (0) + (1) (1) = 1

إذن الزوج (و ، ي) = (0 ، 1)

– إذا كان : ب ≠ 1

لنعتبر المتتالية : أ ، 2 أ ، 3 أ ، ...، ...، (ب – 1) أ.

ولنُقسّم كل حد من حدود المتتالية هذه على ب.

ب أولي مع أ ولا يُقسم أي عدد من الأعداد : 1 ، 2 ، 3 ، ...، ب – 1 فتكون كل البواقي تختلف عن الصفر . لنبرهن على أنها مختلفة مثنى مثنى.

نفرض أنه يوجد مضاعفان ك أ ، ل أ لهما نفس الباقي ف فيكون : ك أ = ب ر + ف ، ل أ = ب رَ + ف.

ومنه : أ |ك – ل| = ب |ر – رَ|

إذن ب يُقسّم أ . |ك – ل| الذي ينتمي إلى المتتالية المذكورة سابقا لأن : (ك < ب وَ ل < ب) ⇐ |ك – ل| < ب

وهذه النتيجة تناقص الفرض أي أن ب لا يُقسّم أي حد من حدود المتتالية.

فالبواقي كلها مختلفة وكلها أصغر من ب فتتراوح قيمها بين 1 ، ب − 1

ليكن ﺃ س حد المتتالية الذي يعطي الباقي 1 فيكون لدينا :

ﺃ س = ب ر + 1 وهذا يعني : ﺃ س − ب ر = 1

أي : ﺃس + ب (− ر) = 1

إذن الزوج (و، ي) الذي نبحث عنه هو : (س ، − ر)

3 – 3 . نظرية :

إذا كان جـ أوليا مع كل من ﺃ ، ب فإنه أولي مع الجداء ﺃ × ب .

مثال : 21 $\wedge$ 10 = 1 وَ 21 $\wedge$ 8 = 1

إذن : 21 $\wedge$ (10 . 8) = 1 أي : 21 $\wedge$ 80 = 1

*** البرهان :**

لنفرض أن : جـ $\wedge$ ﺃ = 1 وَ جـ $\wedge$ ب = 1

ولنضع : د = جـ $\wedge$ ﺃ ب

جـ $\wedge$ ﺃ = 1 $\Leftarrow$ جـ ب $\wedge$ ﺃ ب = ب (من خواص الـ ق . م . أ)

ولكن : د / جـ وَ د / ﺃ ب إذن : د / ب جـ وَ د / ﺃ ب

ومنه د / ب لأن : ب جـ $\wedge$ ﺃ ب = ب

ولكن : (د / جـ وَ د / ب) $\Leftarrow$ د = 1 . (لأن ب $\wedge$ جـ = 1)

د = 1 معناه جـ $\wedge$ ﺃ ب = 1

3 – 4 نظرية " قوص " : (Théorème de Gauss)

إذا قَسّم عدد جداء عددين وكان أوليًا مع أحدهما فإنه يُقسّم الآخر.

البرهان :

ليكن جـ يُقسّم ﺃ ب وَ جـ $\wedge$ ﺃ = 1

حسب نظرية بيزوت يكون :

جـ $\wedge$ ﺃ = 1 $\Leftarrow$ E (و ، ي) $\in$ ص^2 بحيث : ﺃ . و + جـ . ي = 1

أي (ﺃ . و) ب + (جـ . ي) ب = ب ...... (1)

ومنه : (جـ / ﺃ ب وَجـ / جـ) $\Leftarrow$ جـ / ﺃ و ب + جـ ي ب) أي جـ / ب

3 – 5 – نتيجة :

إذا قبل عدد القسمة على عددين أوليين فيما بينهما فإنه يقبل القسمة على جدائهما.

مثال : 15 / 210 وَ 14 / 210 حيث : $15 \wedge 14 = 1$

إذن : (15 × 14) / 210 أي 210 / 210.

البرهان :

لتكن : أ ، ب ، ن ثلاثة أعداد طبيعية حيث :

أ / ن وَ ب / ن وَ أ $\wedge$ ب = 1

أ / ن $\Leftrightarrow$ E ك ∋ ط* / ن = أ ك.

ب / ن إذن ب / أ ك ولكن أ $\wedge$ ب = 1

فيكون ب / ك (حسب نظرية قوص).

إذن يوجد كَ بحيث : ك = ب كَ أي ن = أ ك = أ ب كَ

ن = (أ ب) كَ ومنه أ ب / ن .

3 – 6 نظرية :

يكون العدد الطبيعي د هو الـ ق . م . أ للعددين أ، ب إذا وفقط إذا كان حاصلا قسمة كل منهما على د أوليين فيما بينهما أي أ $\wedge$ب = د $\Leftrightarrow$ $\frac{أ}{د} \wedge \frac{ب}{د} = 1$.

البرهان :

لنضع $\frac{أ}{د}$ = أَ وَ $\frac{ب}{د}$ = بَ أي : أ = د أَ وَ ب = د بَ.

– لنبرهن : د =أ $\wedge$ ب $\Leftarrow$ أَ $\wedge$ بَ = 1.

لنفرض أن : أَ $\wedge$ بَ = ك حيث ك $\neq 1$

أَ = أً . ك وَ بَ = بً . ك .

ومنه : أ = (أً ك) د وَ ب = (بً ك) د.

إذن أ = أً . (ك . د) وَ ب = بً (ك . د).

وهذا يعني أن ك د / أ وَ ك د / ب مع ك د > د . لأن ك > 1

إذن د ليس الـ ق . م . أ (لأن ك د قاسم مشترك أكبر منه).

إذن حتمًا : أَ $\wedge$ بَ = 1

– لتبرهن : أ ∧ بَ = 1 ⇐ د = أ ∧ ب .

أ ∧ بَ = 1 ⇐ أ د ∧ بَ د = د وهذا يعني أ ∧ ب = د.

3 – 7 العلاقة بين ق . م . أ ، م . م . أ :

نظرية :

مهما كان العددان الطبيعيان أ ، ب غير المعدومين فإنه : (أ ∧ ب) × (أ ∨ ب) = أ × ب.

أو ق . م . أ (أ ، ب) × م . م . أ (أ ، ب) = أ × ب.

مثال : $30 \wedge 18 = 6$ ، $30 \vee 18 = 90$.

$6 \times 90 = 540 = 30 \times 18$.

البرهان : نعتبر د = أ ∧ ب.

لدينا : أ = أَ د ، ب = بَ د مع (أَ ∧ بَ) = 1

كل مضاعف مشترك لـ أ ، ب من الشكل : م = أ ك وَ م = ل ب.

أ ي : م = ك أَ د = ل بَ د و منه ك أَ = ل بَ .(لأن د ≠ 0)

إذن : أَ / ل بَ وَ أَ ∧ بَ = 1.

فحسب نظرية قوص يكون أَ / ل.

لنضع ل = λ أَ ونستنتج منه : ك أَ = ل بَ = (λ أَ) بَ

أي : ك = λ بَ (لأن أَ ≠ 0)

ومنه كل مضاعف مشترك م لـ أ ، ب يكتب على الشكل :

م = λ أَ بَ د ونتحصل على أصغر مضاعف مشترك من أجل λ = 1 فيكون إذن : م = أَ بَ د و منه :

(أ ∨ ب) × (أ ∧ ب) = (أَ بَ د) د = (أَ د) (بَ د) = أ × ب

3 – 8 - حساب المضاعف المشترك الأصغر :

* باستعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية نذكر أن :

الـ م . م . أ (أ ، ب) هو جداء كل العوامل الأولية الموجودة في تحليل أ أو ب المأخوذة بأكبر أس . (كل عامل يؤخذ مرة واحدة) .

مثال : $30 = 2 \times 3 \times 5$. $18 = 2 \times 3^2$. $30 \vee 18 = 2 \times 3^2 \times 5 = 90$.

ملاحظة : تستعمل هذه الطريقة مع أعداد صغيرة (أصغر من 1000) . لأن التحليل يتطلب وقتا طويلا .

باستعمال خوارزمية إقليدس :

يُحسب أ ∧ ب بخوارزمية إقليدس ثم نستنتج أ ∨ ب اعتمادًا على العلاقة : أ ∨ ب = $\frac{أ \times ب}{أ \wedge ب}$.

مثال : أ = 2324 ، ب = 672 .

2	5	2	3	
28	56	308	672	2324
0	28	56	308	

2324 ∧ 672 = 28.

إذن : 2324 ∨ 672 = $\frac{2324 \times 672}{28} = 55776$.

3 – 9 الـ ق . م . أ .و الـ م . م . أ لـعدة أعداد طبيعية :

رأينا سابقا (حسب تعريف الـ ق . م . أ و الـ م . م . أ) أن العمليتين " ∧ "وَ ∨ " تجميعيتان ، نستنتج من هذا أن :

أ ∧ ب ∧ جـ = (أ ∧ ب) ∧ جـ وأن :أ ∧ ب ∧ جـ ∧ د=[(أ ∧ب) ∧جـ] ∧د.

أ ∨ب ∨ جـ = (أ ∨ب)∨ جـ وأن أ ∨ ب∨جـ ∨ د =[(أ ∨ب) ∨ جـ] ∨د.

مثال :

أحسب : 6 ∧ 9 ∧ 28 ∧ 30.

6 ∧ 9 = 3 إذن : [(6 ∧ 9) 28 ∧] ∧ 30 = (3 ∧ 28) ∧ 30 = 1 ∧ 30= 1

3 – 10 – تعريف :

نقول عن عدة أعداد طبيعية أنها أولية فيما بينها كليا إذا كان : الـ ق . م . أ لها هو 1.

مثال :

6 ∧ 9 28 ∧ = 1.

فالأعداد : 6 ، 9 ، 28 أولية فيما بينها كلياً.

(لاحظ أنها ليست حتمًا أولية فيما بينها مثنى مثنى لأن : 6∧ 9 ≠ 1) .

3 – 11 – المعادلة : أ س + ب ع = جـ في ص^2 :

لتكن (م) المعادلة : أ س + ب ع = جـ في $ص^2$ حيث : أ ، ب ، جـ أعداد صحيحة وَ أ ، ب غير معدومين.

نعتبر : ق = أ ∧ ب

*** دراسة وجود الحلول :**

* إذا كان ق لا يُقسم جـ فإن المعادلة (م) لا تقبل حلاً لأن :

ق / أ وَ ق / ب ⟸ ق / أ س + ب ع . أي ق / جـ.

* إذا كان ق = 1 أي إذا كان : أ وَ ب أوليين فيما بينهما فإنه يوجد $(س_0، ع_0)$ ∋ ص× ص

بحيث : أ $س_0$ + ب $ع_0$ = 1 .

ومنه : أ(جـ $س_0$) + ب (جـ $ع_0$) = جـ.

فيوجد على الأقل الحل (جـ $س_0$ ، جـ $ع_0$)

* إذا كان ق ≠ 1 وَ ق / جـ :

نضع في هذه الحالة : أ = أَ ق ، ب = بَ ق حيث : أَ ∧ بَ = 1

جـ = جَـ ق . يكون عندئذ : أَ ∧ بَ = 1.

لدينا : أ س + ب ع = جـ ⟺ (أَ ق) س + (بَ ق) ع = جَـ ق

⟺ أَ س + بَ ع = جَـ

فالمعادلة تؤول إلى الشكل السابق (حيث ق = 1)

فهي تقبل على الأقل حلاّ .

الخلاصة :

المعادلة : أس + ب ع = جـ تقبل حلاً على الأقل في المجموعة $ص^2$ إذا وفقط إذا كان : (أ ∧ ب) / جـ

طريقة الحل :

* **مثال 1** : حل في $ص^2$ المعادلة : 8 س – 6 ع = 3 .

8 ∧ 6 = 2 وَ 2 لا يقسم 3.

فالمعادلة لا تقبل حلاً أي أن مجموعة حلولها هي : ϕ

مثال 2 : حل في $ص^2$ المعادلة : 12 س + 5 ع = 0 . . . (م)

نلاحظ أن جـ = 0 .

المعادلة تقبل حلولاً لأن : (12 ∧ 5) / 0 .

لدينا : (م) ⟺ 12 س = – 5 ع .... (مَ)

(12 / – 5 ع وَ 12 ∧ 5 = 1) ⟸ 12 / ع (نظرية قوص)

فيكون : ع = 12 ك / ك ∋ ص.

بالتعويض في المعادلة (مَ) ينتج :

12 س = – 5 (12 ك) أي : س = – 5 ك / ك∋ ص.

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة (م) هي :

مج = { (س ، ع) ∋ ص ^{2} / س = – 5 ك وَ ع = 12 ك وَ ك ∋ ص}

وعلى سبيل المثال نعطيك بعض الحلول الخاصة :

{ (0 ، 0) ، (– 5 ، 12) ، (10 ، –24) ، . . . . }

مثال 3 : حل في ص ^{2} : 10 س – 15ع = 35 ....(م)

10 ∧ 15 = 5 وَ 5 / 35

فالمعادلة (م) تقبل حلاً .

10 س – 15 ع = 35 ⟺ 2 س – 3 ع = 7 . . . (مَ)

لاحظ على سبيل المثال أن (5 ، 1) حل خاص فيكون لدينا :

2 س – 3 ع = 7 وَ 2(5) – 3(1) = 7 .

وبطرح المعادلة الثانية من المعادلة الأولى (في السطر السابق) نحصل على المعادلة :

2 (س – 5) – 3 (ع – 1) = 0 .

(مَ) ⟺ 2 (س –5) = 3 (ع – 1) . . . . . (مً)

[2 / 3 (ع – 1) وَ 2 ∧ 3 = 1] ⟸ 2 / ع – 1 .

فيكون : ع – 1 = 2 ك أي ع = 2 ك + 1 / ك ∋ ص

وبتعويض ع في المعادلة (مً) نحصل على :

2(س – 5) = 6 ك أي س = 3 ك + 5 / ك ∋ ص

فمجموعة حلول المعادلة (م) هي : مج = { (3 ك +5 ، 2 ك + 1) / ك ∋ ص }

وعلى سبيل المقال نعطيك بعض الحلول الخاصة :

{(8 ، 3) ، (2 ، – 1) ، (20 ، 11) ، .... } .

4 – الأعداد الأولية :

تمهيد :

هدف هذه الدراسة هو تحليل الأعداد الصحيحة إلى جداء عوامل ونستهلّ الدراسة بالأعداد غير القابلة للتحليل أي الأعداد الأولية .

وبما أنه إذا كان فيص : ع = أ × ب × جـ يكون لدينا في ط :

|ع| = |أ| × |ب| × |جـ| . فيمكن حصر مجال الدراسة إلى ط .

ومن جهة أخرى نعلم أن :0 = أ × 0 أي أنه يمكن تحليل الصفر بصفة اختيارية

ومن جهة أخرى نعلم كذلك أن : أ = 1 × 1 × ...... × 1 × أ مثلا، يعني أنه يمكن إدخال العامل 1 في الجداء بصفة اختيارية.

هذه الاعتبارات تؤدي بنا إلى حصر الدراسة إلى المجموعة : ط – { 0 ، 1 }

4 – 1 – تعريف :

نقول عن عدد ن من ط – { 0 ، 1 } أنه أولي إذا كانت مجموعة قواسمه تحتوي عنصرين فقط هما : الواحد والعدد ن نفسه.

مثال : الأعداد : 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13 ، 17 كلها أولية .

ملاحظة : إذا رمزنا لمجموعة قواسم العدد ن المختلفة عن 1 بالرمز : قَ (ن) يكون لدينا : ن أولي ⟺ قَ (ن) = { ن }

نرمز لمجموعة الأعداد الأولية بالرمز : **ل**.

4 – 2 نظرية :

كل عدد طبيعي أكبر تمامًا من الواحد يقبل على الأقل قاسمًا أولياً.

البرهان : ليكن ن ∋ ط – { 0 ، 1 } .

* إذا كان : ن∋ **ل** فإن ن هو قاسم أولي للعدد ن.

* إذا كان : ن ∌ **ل** فإن ق (ن) تحوي على الأقل عنصرًا يختلف عن العدد ن (وإلاّ يكون ن أوليا).

ليكن هـ أصغر عنصر في المجموعة ق (ن) .

إما هـ أولي وإما يقبل قاسمًا أوليا أصغر منه ويكون حينئذ قاسمًا للعدد ن. وهذا يعني أن العدد ن يقبل قاسمًا أصغر من هـ. وهذا يناقض الفرض.

نستنتج من هذا أن أصغر قاسم للعدد ن (خلاف الواحد) هو عدد أولي .

4 – 3 – نظرية :

مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية.

البرهان :

لو كانت المجموعة منتهية لكان لها عنصر أكبر.

يكفي أن نبرهن على أنه مهما كان العدد الأولي ن يوجد عدد أولي هـ أكبر منه.
ليكن العدد الأولي ن ولنعتبر العدد : هـ = ن! + 1.
كل عدد أصغر من ن يُقسّم ن ! فيكون باقي قسمة ن ! + 1 على هذا العدد يساوي 1.
وهذا يعني أنه لا يوجد عدد أولي أصغر من ن يقسم ن! + 1 ولكن حسب النظرية السّابقة وهي : (لكل عدد طبيعي على الأقل قاسم أولي خلاف الواحد)، نميز حالتين :

* إما (ن ! + 1) عدد أولي وهو أكبر من ن.
* إما (ن ! + 1) يقبل قاسمًا أولياً أكبر من ن وهو العدد الأولي الذي نريد إثبات وجوده.

4 – 4 نظرية :

إذا كان عدد أولي ن لا يُقسّم عددًا طبيعيًا هـ فإن ن ، هـ أوليان فيما بينهما.

مثال : 5 لا يقسم 18. أي 5 $\wedge$ 18 = 1 .

إذن : 5 وَ 18 أوليان فيما بينهما .

البرهان : نفرض أن : ن عدد أولي ، ن لا يُقسّم هـ.

لدينا : ق (ن) = { 1 ، ن } وَ ن $\not\ni$ ق (هـ)

فيكون : ق (ن) $\bigcap$ ق (هـ) = { 1 } .

أي أن : ن $\wedge$ هـ = 1

4 – 5 – نظرية :

كل عددين أوليين ومختلفين أوليان فيما بينهما

البرهان : ليكن ن ، نَ عددين أوليين ومختلفين

ق (ن) = { 1 ، ن } ، ق (نَ) = { 1 ، نَ }

ومنه ق (ن) $\cap$ ق (نَ) = {1} (لأن ن $\neq$ نَ)

أي أن : ن $\wedge$ نَ = 1

4 – 6 – نظرية :

إذا قسّم عدد أولي جداء عاملين فإنه يُقسّم أحد هذين العاملين على الأقل.

أي $\forall$ ن $\ni$ **ل** : ن / أ . ب $\Leftarrow$ ن / أ أو ن / ب

البرهان :

* إذا كان : ن / أ فإن النتيجة محققة.
* إذا كان : ن لا يُقسّم أ فإن : ن $\wedge$ أ = 1 (حسب النظرية 4 – 4)

فيكون ن / ب (حسب نظرية قوص)

ففي كل حالة ن يُقسّم أحد العوامل.

ملاحظة :

يمكن توسيع مجال تطبيق هذه النظرية إلى عدة عوامل بسهولة .

يكفي أن نكتب مثلاً : ن /أ ب جـ على الشكل : ن / (أ ب) جـ

4 – 7 – طريقة التحقق من أن عددًا طبيعيًا مفروضًا أولي أم لا :

* باستعمال جدول للأعداد الأولية .

وهذه الطريقة مرهونة بوجود الجدول وحجمه. (عادة تشمل الجداول كل الأعداد الأولية الأصغر من 10.000).

* باستعمال طريقة القسمة على القواسم الأولية :

حيث يُقسّم العدد الطبيعي ن على كل الأعداد الأولية المتتابعة ابتداءًا من 2 ، 3 ، 5 ، .... إلى غاية :

– وجود قاسم من بين الأعداد الأولية المذكورة وعندئذ يكون العدد الطبيعي ن ليس أوليا .

– لا يوجد قاسم أولي أصغر أو يساوي الجذر التربيعي للعدد ن ، فيكون العدد ن أوليا في هذه الحالة .

مثال : ن = 937 .

من الملاحظ أن هذا العدد لا يقبل القسمة على : 2 ، 3 ، 5 (وذلك إعتماداً على قواعد قابلية القسمة على 2 ، 3 ، 5)

نواصل تقسيم هذا العدد على الأعداد : 7 ، 11 ، 13 ، 17 ، 19 ، 23 ، 29 ولكن بدون جدوى (أي لا يقبل القسمة).

بما أن : $31^2 > 937$

لا داعي لمواصلة العملية والعدد : 937 أولي.

4 – 8 النظرية الأساسية في تحليل الأعداد الطبيعية :

كل عدد طبيعي أكبر من 1 يحلل بطريقة وحيدة إلى جداء عوامل أولية.

البرهان :

* وجود التحليل : ليكن ن ∈ ط وَ ن ∉ { 0 ، 1 }. يقبل ن على الأقل قاسمًا أوليا أ$_1$.

لنضع : ن = أ$_1$. ل$_1$

فإما ل$_1$ أولي والتحليل في هذه الحالة انتهى.

إمـا $ل_1$ لـيس أوليا ولكنـه يقبل قاسمًا أوليـا $ل_2$. ومنـه : $ل_1 = أ_2 ل_2$ أي : $ن = أ_1 . أ_2 .$ $ل_2$. إما $ل_2$ أولـي وينتـهـي التحـلـيل وإما بمواصلـة العمـليـة نتحصّل علـى متتالية متنـاقصـة من حواصل القسمـة $ل_1$ ، $ل_2$ .... ، $ل_{م-1}$ ، $ل_م$ إلى آخره.

حاصـل مـن هذه السلسلـة وهو $ل_{م-1}$ أولي وإلا استمرت العمـليـة. لنضـع : $ل_{م-1} = أ_م$ فيكـون لدينـا $ن = أ_1 أ_2 .... أ_م .$

(ن يحلـل إلـى جداء م عـامـل أولـي).

* وحدانيـة التحـليل : لنفـرض أن العدد ن يحلّل بطـريقـتيـن :

$ن = أ_1 . أ_2 .... أ_م$ و $ن = أَ_1 أَ_2 .... أَ_{مَ}$

$أ_1$ يقسم الطرف الأول فهو يقسم الطـرف الـثـانـي .

ولكن حسب النظرية (4 – 6) :

$أ_1$ يُقسّم أحد عوامل الطرف الثاني وبما أن كل العوامل أولية إذن : $أ_1$ يساوي أحد العوامل $أَ_1$ (نغير الترقيم إذا اقتضى الأمر)

$أ_1 = أَ_1 .$

ويكون لدينا الاختزال : $أ_2 . أ_3 ...... أ_م = \overleftarrow{أ}_2 . \overleftarrow{أ}_3 ...... \overleftarrow{أ}_{مَ}$

وبنفس الطريقة المستعملة سابقا نحصل على :

$أ_2 = \overleftarrow{أ}_2$ ، $أ_3 = \overleftarrow{أ}_3$ ، ...... $أ_م = \overleftarrow{أ}_{مَ}$ / $م \geq مَ$

وبتطبيق نفس الطريقة بالنسبة إلى :

$أَ_1$ ، $أَ_2$ ، .... $أَ_{مَ}$.

نتحصل على المساويات :

$أ_1 = \overleftarrow{أ}_1$ ، $أ_2 = \overleftarrow{أ}_2$ ، ...... $\overleftarrow{أ}_{مَ} = أ_م$ / $مَ \geq م$

$(م \geq مَ$ و $مَ \geq م) \Leftarrow م = مَ$

أي : $أ_1 = \overleftarrow{أ}_1$ ، $أ_2 = \overleftarrow{أ}_2$ ، ...... $أ_م = \overleftarrow{أ}_م$.

ملاحظـة : في المساواة $ن = أ_1 . أ_2 .... أ_م$ يمكن وجود عوامل متساوية وبتجميع هذه العوامل نحصل على الشكل :

ن = $أ_1^{\alpha_1} . أ_2^{\alpha_2} . . . . أ_ر^{\alpha_ر}$ حيــــــــث : $أ_1$ ، $أ_2$ ، . . . . $أ_ر$ أعــــــــداد أولــــــــية وَ α_1 ، α_2 ، . . . . $\alpha_ر$ أعداد طبيعية غير معدومة .

4 – 9 عدد قواسم عدد طبيعي :

ليكن ن = $أ_1^{\alpha_1} . أ_2^{\alpha_2} . . . . أ_ر^{\alpha_ر}$. كل قاسم للعدد الطبيعي ن يتكوّن من جداء عوامل أولية من ضمن العوامل :

$أ_1$ ، $أ_2$ ، . . . . $أ_ر$ مع أسس تتراوح ما بين : 0 ، α_1 بالنسبة لِـ $أ_1$.

0 ، α_1 بالنسبة لِـ $أ_2$.

. . . .

0 ، $\alpha_ر$ بالنسبة لِـ $أ_ر$

فيكون عدد قواسم العدد ن هو عدد الأعداد التي يمكن كتابتها على الشكل :

م = $أ_1^{\beta_1} . أ_2^{\beta_2} . . . . . أ_ر^{\beta_ر}$ حيث :

$\beta_1 \in \{0، 1، . . . . \alpha_1\}$ ، $\beta_2 \in \{0، 1، . . . . \alpha_2\}$

، . . . . ، $\beta_ر \in \{0، 1، . . . . \alpha_ر\}$

عدد القواسم الممكنة هو : $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \times . . . \times (\alpha_ر + 1)$

مثال : $36 = 2^2 \times 3^2$.

فيكون عدد قواسم العدد 36 هو : (2 +1) (2 +1) = 9.

ومنه ق (36) = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 6 ، 9 ، 12 ، 18 ، 36 } .

5 – تمارين التصحيح الذاتي :

5 – 1 عين مجموعة الأزواج المرتبة (أ ، ب) ∈ ط* × ط* حيث :

أ + ب = 360 ، أ ∧ ب = 18 .

5 – 2 ليكن أ ∈ ط*.

ما هو الـ ق . م . أ للعددين 2أ + 1 ، 3أ + 1.

5 – 3 عين مجموعة الأزواج المرتبة (أ ، ب) ∈ ط*× ط* حيث :

أ + ب = 28 ، أ ∨ ب = 40 .

5 – 4 إذا كـان ا ، ب عدديـن طبيعيين وكـان : $ا^2$ – $ب^2$ عـدد طبيعـي أولـي فمـا هـي العلاقة التي تربط بين العددين ا ، ب ؟

6 – الأجوبــة :

6 – 1 : البحث عن مجموعة الأزواج المرتبة (ا ، ب) ∋ ط* × ط* يؤول إلى الجملة الآتية في ط* × ط*.

$$\left.\begin{array}{l} ا+ب=360 \\ ا\wedge ب=18 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

نضع : ا = 18 اَ و ب = 18 بَ يكون عندئذ : اَ ∧ بَ = 1

والجملة (1) تؤول إلى الجملة : $\left.\begin{array}{l} 18اَ+18بَ=360 \\ اَ\wedge بَ=1 \end{array}\right\}$

أي : $\left.\begin{array}{l} اَ+بَ=20 \\ اَ\wedge بَ=1 \end{array}\right\}$

ومجموعة الأزواج (اَ ،بَ) التي تحقق الجملة الأخيرة هي :

{(1 ، 19)،(19 ، 1) ، (3 ، 17)،(17 ، 3) ، (7 ، 13)، (13 ، 7)،(9 ، 11)،(11، 9)}

ومجموعة الأزواج (ا ، ب) التي هي حلول للجملة (1) هي :

{(18،342)،(54،306)،(126،234)،(162،198)،(342،18)،(306،54)،(234،126)،(198 ،162)}.

6 – 2 نضع : Δ = (2ا + 1) ∧ (3 ا + 1) .

إن العدد Δ يُقسّم كل عدد من الشكل :

ك (2 ا + 1) + م (3 ا + 1) حيث (ك ، م) ∋ ص × ص.

إذن Δ /(– 1) (2 ا + 1) + (1) (3 ا + 1) أي Δ / ا و منه Δ / 2 ا.

و لكن [Δ / (2 ا + 1) وَ Δ / 2 ا] ⇐ Δ / 1 وهذا يعني Δ = 1

6 – 3 – نعتبر ق = ا ∧ ب عندئذ يكون :

ا = اَ ق وَ ب = بَ ق مع : اَ ∧ بَ = 1

$$\text{أ} \vee \text{ب} = \frac{\text{أ . ب}}{\text{أ} \wedge \text{ب}} = \frac{\overleftarrow{\text{أ}}\ \text{ق . بَ ق}}{\text{ق}} = \overleftarrow{\text{أ}}\ \text{بَ ق}$$

فحل الجملة : $\begin{cases} \text{أ} + \text{ب} = 28 \\ \text{أ} \vee \text{ب} = 40 \end{cases}$ يؤول إلى الجملة $\begin{cases} \overleftarrow{\text{أ}}\ \text{ق} + \text{بَ ق} = 28 \\ \overleftarrow{\text{أ}}\ \text{بَ ق} = 40 \\ \overleftarrow{\text{أ}} \wedge \text{بَ} = 1 \end{cases}$

أي : $\begin{cases} (\text{أَ} + \text{بَ})\text{ق} = 28 \ldots\ldots (1) \\ \overleftarrow{\text{أ}}\ \text{بَ ق} = 40 \ \ldots\ldots (2) \\ \text{أَ} \wedge \text{بَ} = 1 \ \ldots\ldots (3) \end{cases}$

من المعادلتين (1) ، (2) نستنتج أن : ق / 28 وَ ق / 40 .

أي أن : ق $\in$ ق (28) $\cap$ ق (40)

إذن: ق $\in$ ق (28 $\wedge$ 40) أي : ق $\in$ ق (4).

وهذا يعني ق $\in$ { 1 ، 2 ، 4 }

عندئذ نميّز ثلاث حالات :

* ق = 1

الجملة تصبح : $\begin{cases} \text{أَ} + \text{بَ} = 28 \\ \overleftarrow{\text{أ}}\ \text{بَ} = 40 \\ \text{أَ} \wedge \text{بَ} = 1 \end{cases}$

لاحظ أن مجموع وكذا جداء العددين أَ ، بَ هو عدد زوجي وهذا يستلزم كون كل منأَ، بَ زوجي وعندئذ لا يمكن أن يكون أوليين فيما بينهما فالجملة في هذه الحالة مستحيلة.

* ق = 2 .

الجملة تصبح :

$$\begin{cases} 2\left(\text{أَ}+\text{بَ}\right)=28 \\ 2\,\text{أَ}\,\text{بَ}=40. \\ \text{أَ}\wedge\text{بَ}=1. \end{cases} \quad \text{أي :} \quad \begin{cases} \text{أَ}+\text{بَ}=14 \\ \text{أَ}\,\text{بَ}=20 \\ \text{أَ}\wedge\text{بَ}=1 \end{cases}$$

ولنفس الأسباب (كما في الحالة السابقة) الجملة مستحيلة .

* ق = 4 .

الجملة تصبح :

$$\begin{cases} 4\left(\text{أَ}+\text{بَ}\right)=28 \\ 4\,\text{أَ}\,\text{بَ}=40. \\ \text{أَ}\wedge\text{بَ}=1. \end{cases} \quad \text{أي :} \quad \begin{cases} \text{أَ}+\text{بَ}=7 \\ \text{أَ}\,\text{بَ}=10 \\ \text{أَ}\wedge\text{بَ}=1 \end{cases}$$

ومجموعة الأزواج (أَ، بَ) التي تحقق هذه الجملة هي : {(2 ، 5)،(5،2)}

بذلك تكون مجموعة الأزواج (أ ، ب) التي نبحث عنها هي :

{ (8 ، 20) ، (20 ، 8) }

6 – 4 :

أ^2– ب^2 عدد طبيعي أولي معناه :

أ > ب وأنه لا يوجد قاسم أولي لهذا العدد سوى : 1وَ أ^2–ب^2. (العدد نفسه).

ولكن : $\forall$ (أ ، ب) ∍ ط×ط : أ^2–ب^2 = (أ + ب) (أ – ب)

وبما أنه لا يوجد قاسمان مختلفان للعدد أ^2–ب^2 سوى : 1 وَ أ^2–ب^2 و بما أن أ + ب $\geq$ أ – ب.

نستنتج أن : أ – ب = 1 وَ أ + ب = أ^2–ب^2.

فالعلاقة المطلوبة هي : أ – ب = 1 أو أ = ب + 1.

الموافقة بترديد العدد ن

الهدف من الدرس :

معرفة بواقي قسمة عدد صحيح أو قوة عدد صحية على عدد صحيح موجب معلوم وغير معدوم

المدة اللازمة لدراسته : 10 ساعة.

الدروس التي ينبغي الرجوع إليها :

1 – مجموعة الأعداد الطبيعية ط

2 – العلاقة الثنائية في مجموعة

المراجع الخاصة بهذا الدرس :

كتاب الرياضيات 3 ث/ع + ر المعهد التربوي الوطني

تصميم الدرس

1 – علاقة القسمة في المجموعة ص

2 – علاقة الموافقة بترديد العدد ن في المجموعة ص

3 – خواص علاقة الموافقة بترديد العدد ن.

4 ـ تمارين التصحيح الذاتي.

5 – أجوبة التصحيح الذاتي

1 – علاقة القسمة في المجموعة ص :

1 – تعريف :

في المجموعة ص نقول أن العدد ب (ب $\neq 0$) يُقسّم العدد ٱ أو أن العدد ب قاسم للعدد ٱ أو العدد ٱ يقبل القسمة على العدد ب إذا وفقط إذا كان ٱ مضاعفا للعدد ب ونكتب : ب \ ٱ .

مثال :

العدد + 60 يقبل القسمة على الأعداد :+ 5، − 6، − 12، + 20، . . . **ملاحظات :**

* كل عدد صحيح يقبل القسمة على العددين : + 1 ، − 1 .

* الصفر يقبل القسمة على أي عدد صحيح.

ولهذا نكتفي بدراسة قابلية القسمة في المجموعة ص − { 0 } أو ص* .

1 – 2 – دراسة علاقة القسمة في ص :

$\forall$ ٱ $\in$ ص : ٱ = ٱ $\times$ (+ 1). أي أن ٱ يُقسّم نفسه . فالعلاقة : " \ " إنعكاسية في ص *.

* $\forall$ ٱ $\in$ ص* : $\forall$ ب $\in$ ص* ، $\forall$ جـ $\in$ ص .

ٱ \ ب $\Leftrightarrow$ E ك $\in$ ص / ب = ٱ $\times$ ك ..... (1)

ب \ جـ $\Leftrightarrow$ E كَ $\in$ ص / جـ = ب $\times$ كَ ... (2)

من (1) ، (2) نستنتج أن : جـ = أ × ك × كَ

أي : جـ = أ كً (بوضع كً = ك × كَ)

إذن : أ \ جـ

فالعلاقة " \ " متعدية في ص*.

* ∀ أ ∈ ص* : ∀ ب ∈ ص* :

(أ \ ب وَ ب \ أ) ⟸ E (ك ، كَ) ∈ $ص^2$ / ب = أ × ك وَ أ = ب × كَ

ومنه : أ = أ × ك × كَ وَ أ ≠ 0 فيكون : ك × كَ = 1

وهذا لا يتحقق في ص إلا إذا كان : ك = كَ = 1 أو ك = كَ = − 1

أي : أ = ب أو أ = − ب

فالعلاقة " \ " ليست ضد تناظرية في ص*.

* **النتيجة** : علاقة القسمة في ص ليست علاقة ترتيب

1 − 3 − القسمة الإقليدية في ص :

1 − 3 − 1 : تعريف :

إذا أعطي عدد صحيح أ وعدد صحيح موجب تمامًا ب فإنه يوجد زوج وحيد (ك ، ق) ∈ ص × ص بحيث يكون :

أ = ب ك + ق وَ 0 ≤ ق < ب.

تسمى عملية البحث عن الزوج (ك ، ق) القسمة الإقليدية للعدد الصحيح أ على العدد ب ، حيث يُمثل ك حاصل هذه القسمة ، ق باقيها.

مثال : أ = 27 ، ب 12 لدينا : 27 = 12 × 2+ 3.

ومنه : (ك ، ق) = (2 ، 3).

2 − الموافقة بترديد ن :

2 − 1 : تعريف :

ليكن ن عددًا صحيحًا موجباً تمامًا ، ن ص مجموعة مضاعفات العدد ن.

العلاقة الثنائية ع المعرفة في المجموعة ص كالآتي :

* ∀ أ ∈ ص ، ∀ ب ∈ ص، أ ع ب ⟺ (أ − ب) ∈ ن ص.

تسمى الموافقة بترديد ن في المجموعة ص.

* **ملاحظات :**

إذا ارتبط العدد أ مع العدد ب وفق العلاقةع ، نقول أن العدد أ يوافق العدد ب بترديد ن ونكتب : أ ≡ ب [ن]

أ ≡ ب [ن] ⇔ E ك ∍ ص/ أ − ب = ن ك.

مثال : نعتبر ن = 5.

13 ≡ 8 [5] لأن : 13 − 8 = 5 وَ 5 ∍ 5ص.

32 ≡ 12 [5] لأن : 32 − 12 = 20 وَ 20 ∍ 5ص.

الخ . . . .

2 − 2 نظرية :

الموافقة بترديد ن في المجموعةص هي علاقة تكافؤ.

البرهان :

* خاصية الانعكاس :

∀ أ ∍ ص، أ − أ = 0 وَ 0 = ن × 0 أي : أ − أ = ن × 0 .

وهذا يعني : أ ≡ أ [ن]

فالعلاقة انعكاسية فيص .

* خاصية التناظرية : مهما يكن العددان الصحيحين أ ، ب لدينا

أ ≡ ب [ن] ⇐ E ك ∍ ص / أ − ب = ن ك

⇐ E ك ∍ ص / ب − أ = ن (− ك)

⇐ E كَ ∍ص /ب − أ = ن كَ.(بوضع كَ = − ك وهو عدد صحيح)

⇐ ب ≡ أ [ن]

فالعلاقة تناظرية فيص .

* خاصية التعدي : مهما تكن الأعداد الصحيحة أ ، ب، جـ لدينا :

أ ≡ ب [ن] وَ ب ≡ حـ [ن] ⇐ { ك ∍ ص / أ − ب = ن ك ......(1) وَ كَ ∍ ص / ب − جـ = ن كَ ......(2) }

⇐ (ك، كَ) ∍ ص ^{2} / (أ − ب) + (ب − حـ) = ن ك + ن كَ

⇐ (ك ، كَ) ∋ ص² / أ – ب + ب – حـ = ن (ك + كَ).

⇐ E كً ∋ ص / أ – جـ = ن كً (بوضع كً = ك + كَ).

⇐ أ ≡ جـ [ن] فالعلاقة متعدية في ص.

* **النتيجة** : علاقة التوافق بترديد ن علاقة تكافؤ في المجموعة ص.

2 – 3 - نظرية :

مهما يكن العددان أ ، ب من ص ومهما يكن العدد ن من ط* لدينا : أ ≡ ب [ن] ⇔ أ وَ ب لهما نفس باقي القسمة على العدد ن.

البرهان :

* **أولاً** : أ ≡ ب [ن] ⇐ أ وَ ب لهما نفس باقي القسمة على العدد ن .

لدينا : أ ≡ ب [ن] ⇔ E ك ∋ ص/ أ – ب = ن ك .....(1)

وكذلك : ب ∋ ص وَ ن > 0 وحسب القسمة الإقليدية يوجد زوج وحيد (ل ، ق) ∋ ص × ص+ بحيث يكون :

ب = ن ل + ق وَ 0 ≤ ق < ن

بتعويض قيمة ب في المساواة (1) نجد :

{ أ – (ن ل + ق) = ن ك ، وَ ، 0 ≤ ق 〈 ن } ⇐ { أ = ن ك + ن ل + ق ، وَ ، 0 ≤ ق 〈 ن }

⇐ { أ = ن (ك + ل) + ق ، وَ ، 0 ≤ ق 〈 ن }

⇐ { أ = ن كَ + ق ، وَ ، 0 ≤ ق 〈 ن } (بوضع كَ = ك + ل وهو عدد صحيح)

نستنتج أن : ب = ن ل + ق / 0 ≤ ق < ن وأ = ن كَ + ق / 0 ≤ ق < ن

أي أن أ وَ ب لهما نفس باقي القسمة على العدد ن.

* **ثانيا** : أ وَ ب لهما نفس باقي القسمة على العدد ن $\Leftarrow$ أ ≡ ب [ن]

أ وَ ب لهما نفس باقي القسمة على العدد ن

$\Leftarrow E$ (ك ، كَ) ∋ صـ^2، E ق ∋ صـ$_+$ بحيث : أ= ن ك +ق وَ ب =ن كَ + ق.

ومنه : أ − ب = (ن ك + ق) − (ن كَ + ق)

= ن ك − ن كَ

= ن (ك − كَ)

= ن كً . (بوضع كً = ك − كَ وهو عدد صحيح)

إذن : أ ≡ ب [ن]

مثال :

نعتبر : أ = 17 وَ ب = 41 وَ ن = 6 . لاحظ أن : 17 ≡ 41 [6]

ولدينا : 17 = 2 (6) + 5 وَ 41 = 6 (6) + 5

أي أن العددين : 17 ، 41 لهما نفس باقي القسمة على العدد 6.

* **ملاحظة :**

كل عدد صحيح موجب يوافق باقيه بترديد العدد ن

مثال : نعتبر : أ = 23 ، ن = 7

23 = 3 (7) + 2 $\Leftrightarrow$ 23 − 2 = 3 (7)

أي : 23 ≡ 2 [7] . (2 هو باقي قسمة 23 على 7) .

3 - خواص علاقة الموافقة بترديد ن .

نعتبر في كل ما يأتي : أ ، أ ، ب ، بَ ، جـ أعدادًا صحيحة كيفية ، ن عدد صحيح موجب تمامًا.

3 − 1 −

أ ≡ ب [ن] $\Leftrightarrow$ أ − ب ≡ 0 [ن]

* **البرهان** : أ ≡ ب [ن] $\Leftrightarrow$ (أ − ب) ∋ ن صـ $\Leftrightarrow$ [(أ − ب) − 0] ∋ ن صـ

$\Leftrightarrow$ أ − ب ≡ 0 [ن].

مثـال : نـعـتـبـر أ = 12 وَ ب = 2 وَ ن = 5

لاحظ : 12 – 2 = 10 وأن : 10 ≡ 0 [5]

3 – 2 :

علاقـة التـوافق بتـرديد ن فـي ص منسجمـة مع عملية الجمع (+) أي :

أ ≡ ب [ن]
أَ ≡ بَ [ن]
⇐ أ + أَ ≡ ب + بَ [ن]

* **البـرهـان :**

أ ≡ ب [ن] ⇐ E ك ∈ ص/ أ – ب = ن ك

و أَ ≡ بَ [ن] ⇐ E كَ ∈ ص / أَ – بَ = ن كَ

(أ ≡ ب [ن] وَ أَ ≡ بَ [ن]) ⇐ E(ك، كَ)∈ ص^2 / (أ – ب) +(أَ–بَ) = ن ك +ن كَ.

⇐ E (ك، كَ) ∈ ص^2 / أ – ب + أَ – بَ = ن ك + ن كَ.

⇐ E كً ∈ ص/ (أ + أَ) – (ب + بَ) = ن كً .

وذلـك بـوضـع كً = ك + كَ و هو عدد صـحـيـح .

إذن : (أ ≡ ب [ن] وَ أَ ≡ بَ [ن] ⇐ أ + أَ ≡ ب + بَ [ن]

مثـال : نـعـتـبـر أ = 8 ، ب = 15 ، أَ = 49 ، بَ = 63 ، ن = 7 .

لاحظ أن :

(8 ≡ 15 [7] وَ 49 ≡ 63 [7]) ⇐ 8 + 49 ≡ 15 + 63 [7] أي 57 ≡ 78 [7]

3 – 3 :

علاقة التوافق بترديد ن في ص منـسجمة مع عملية الضرب (×) أي :

أ ≡ ب [ن]
أَ ≡ بَ [ن]
⇐ أ × أَ ≡ ب × بَ [ن]

* **البـرهـان :**

أ ≡ ب [ن] وَ أَ ≡ بَ [ن]⟸ E (ك، كَ)∋ ص ^{2} /أ – ب = ن ك وَ أَ – بَ = ن كَ

⟸ E (ك، كَ) ∋ ص ^{2} / أ = ن ك + ب وَ أَ = ن كَ + بَ

⟸ E (ك، كَ) ∋ ص ^{2} / أ أَ = (ن ك + ب) (ن كَ + بَ)

⟸ E (ك، كَ) ∋ ص ^{2} / أ أَ = ن ^{2} ك كَ + ن ك بَ + ن كَ ب + ب بَ

⟸ E (ك، كَ) ∋ ص ^{2} / أ أَ = ن (ن ك كَ + ك بَ + كَ ب) + ب بَ

⟸ E كً ∋ص/ أ أَ = ن كً + ب بَ

بوضع : ن ك كَ + ك بَ + كَ ب = كً و هو عدد صحيح

⟸ E كً ∋ ص/ أ أَ – ب بَ = ن كً ⟸ أ أَ ≡ ب بَ [ن].

مثـال : نعتبر : أ = 4 ، ب = 12 ، أَ 7 ، بَ = 21 ، ن = 2.

لاحظ أن :

4) ≡ 12 [2] وَ 7 ≡ 21 [2])⟸ 4 × 7 ≡ 12 × 21 [2] أي 28 ≡ 252 [2]

3 – 4 –

أ ≡ ب [ن] ⟸ أ + جـ ≡ ب + جـ [ن]

* **البرهان** :

بما أن علاقة الموافقة بترديد ن علاقة تكافؤ في المجموعةص، فهي إنعكاسية.

أي : ∀ حـ ∋ص: جـ ≡ جـ [ن] فيكون لدينا :

(أ ≡ ب [ن] وَ جـ ≡ جـ [ن]) ⟸ أ + جـ≡ ب + جـ [ن] . (حسب الخاصية 3 – 2).

3 – 5 –

أ ≡ ب [ن] ⟸ أ × جـ ≡ ب × جـ [ن]

* **البرهان** :

يُبرهن على صحة هذه الخاصية بنفس الطريقة السابقة واعتمادًا على الخاصية (3– 3)

مثـال : نعتبر : أ = 19 ، ب = 37 ، حـ = 3 ، ن = 6

لاحظ أن : 19 ≡ 37 [6] ⟸ 19 × 3 ≡ 37 × [3] أي : 57 ≡ 111 [6]

3 – 6 –

∀ λ ∋ ط * فإن : أ ≡ ب [ن] ⟸ λ أ ≡ λ ب [λ ن].

* **البرهان** : أ ≡ ب [ن] ⟸ E ك ∋ ص/ أ − ب = ن ك .

⟸ E ك ∋ ص/ λ (أ − ب) = λ ن ك .

⟸ E ك ∋ ص/ λ أ − λ ب = (λ ن) ك .

⟸ λ أ ≡ λ ب [λ ن] .

مثال : نعتبر : أ = 35 ، ب 14 ، λ = 2 ، ن = 3

لاحظ أن : 35 ≡ 14 [3] ⟸ 35 × 2 ≡ 14 × 2 [2 × 3]

أي : 70 ≡ 28 [6].

3− 7 :

∀ α ∋ ط * فإن : أ ≡ ب [ن] ⟸ أ$^{\alpha}$ ≡ ب$^{\alpha}$ [ن].

* **البرهان** : نبرهن صحة ذلك بطريقة التراجع كما يلي :

* من أجل α = 1 : أ ≡ ب [ن] ⟸ أ ≡ ب [ن]. محققة .

* نفرض أن القضية صحيحة من أجل ك أي :

أ ≡ ب [ن] ⟸ أ^{ك} ≡ ب^{ك} [ن]

ولنبرهن أن القضية صحيحة من أجل ك + 1 أي :

أ ≡ ب [ن] ⟸ أ$^{ك+1}$ ≡ ب$^{ك+1}$ [ن].

لدينا : أ ≡ ب [ن] .... (1).

أ^{ك} ≡ ب^{ك} [ن]......(2) (فرضًا).

فيكون : أ أ^{ك} × ≡ ب × ب^{ك} [ن] (حسب الخاصية 3− 3)

أي : أ$^{ك+1}$ ≡ ب$^{ك+1}$ [ن]

إذن القضية (3 − 7) صحيحة من أجل كل عدد طبيعيα غير معدوم

مثال : نعتبر : أ = 3 ، ب = 5 ، ن = 2 ، α = 4 .

لاحظ : 3 ≡ 5 [2] ، وأن 3^{4} ≡ 5^{4} [2] أي : 81 ≡ 625 [2]

4 - تمارين التصحيح الذاتي :

4 − 1 −

1 − أدرس حسب القيم المختلفة للعدد الطبيعي ن بواقي قسمة العدد $7^{ن}$ على العدد 9.

2 − ما هو باقي قسمة العدد : 5740^{812} على العدد 9.

3 – ما هي قيم العدد الطبيعي ن التي من أجلها يقبل العدد : $16^{3ن}+16^{ن}-2$ القسمة على 9.

4 – 2 : برهن باستعمال خواص علاقة الموافقة أنه من أجل كل عدد طبيعي ن فإن :

1 – العدد : $3^{2ن}-2^{ن}$ يقبل القسمة على 7 .

2 – العدد : $3\times 5^{2ن-1}+2^{3ن-2}$ يقبل القسمة على 17 .

3 – العدد : $ن(ن^{2}-1)$ يقبل القسمة على 3 .

5 - الأجوبـة :

5 – 1 – 1 – دراسة بواقي قسمة العدد $7^{ن}$ على 9 حسب قيم العدد الطبيعي ن :

ن = 0 ، $7^{0}\equiv 1\ [9]$

ن = 1 ، $7^{1}\equiv 7\ [9]$

ن = 2 ، $7^{2}\equiv 4\ [9]$

ن = 3 ، $7^{3}\equiv 1\ [9]$

لدينا $7^{3}\equiv 1\ [9] \Leftarrow 7^{3ك}\equiv 1^{ك}\ [9]$ أي $7^{3ن}\equiv 1[9]$ /ك ∋ ط.

ومنه ينتج ما يلي :

$7^{3ك}\equiv 1\ [9]$ و $7\equiv 7\ [9]) \Leftarrow 7^{3ك+1}\equiv 7\ [9]$

$7^{3ك}\equiv 1\ [9]$ و $7^{2}\equiv 4\ [9] \Leftarrow 7^{3ك+2}\equiv 4\ [9]$

وبما أن كل عدد طبيعي ن يكتب على أحد الأشكال : 3 ك ، 3 ك + 1 ، 3 ك + 2

نستنتج ما يلي :

إذا كان ن = 3 ك فإن : $7^{ن}\equiv 1\ [9]$ (الباقي هو 1) .

إذا كان ن = 3 ك + 1 فإن : $7^{ن}\equiv 7\ [9]$ (الباقي هو 7) .

إذا كان ن = 3 ك+ 2 فإن : $7^{ن}\equiv 4\ [9]$ (الباقي هو 4) .

2 – تعيين باقي قسمة : 5740^{812} على العدد 9.

لدينا من جهة :

5740 = 9 (637) + 7 أي $5740\equiv 7\ [9]$

ومنه : $5740^{812}\equiv 7^{812}\ [9]$

ومن جهة أخرى :

$812 = 3 \times 270 + 2$ أي 812 من الشكل 3 ك + 2 .

ومنه : $7^{812} \equiv 4\ [9]$

وذلك حسب السؤال السابق .

إذن : $5740^{812} \equiv 4\ [9]$

فباقي قسمة 5740^{812} على 9 هو 4

3 – البحث عن قيم ن التي من أجلها يقبل العدد $16^{3ن}+16^{ن}-2$ القسمة على 9.

لدينا :

$16 \equiv 7\ [9] \Leftarrow 16^{3ن} \equiv 7^{3ن}\ [9]$

وحسب السؤال السابق : $7^{3ك} \equiv 1\ [9]$ / ك∈ط .

يكون : $16^{3ن} \equiv 1\ [9]$

كذلك : $16 \equiv 7\ [9] \Leftarrow 16^{ن} \equiv 7^{ن}\ [9]$

نميز عدة حالات : الحالة الأولى : ن = 3 ك / ك∈ط.

* الحالة الأولى ن = 3 ك / ك∈ط

$16^{3ك} \equiv 1\ [9]$ لأن : $7^{3ك} \equiv 1\ [9]$

نستنتج أن :

$(16^{3ن} \equiv 1[9]$ و $16^{ن} \equiv 1\ [9]$ و $2 \equiv -2\ [9]) \Leftarrow +16^{3ن}\ 16^{ن} - 2 = 1 + 1 + 2\ [9]$

أي : $+16^{3ن}\ 16^{ن} - 2 \equiv 0\ [9]$

ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي ن = 3 ك حيث ك∈ط يكون العدد $+16^{3ن}\ 16^{ن} - 2$ قابلاً القسمة على 9

* الحالة الثانية : ن = 3 ك + 1 / ك ∈ ط .

لدينا : $16^{3ن} \equiv 1\ [9]$

لأن : $16^{ن} \equiv 7\ [9]$

نستنتج أن :

$(\equiv 16^{3ن}\ 1\ [9]$ و $16^{ن} \equiv 7\ [9]$ و $-2 \equiv -2\ [9]) \Leftarrow 16^{3ن} + 16^{ن} - 2 \equiv 1 + 7 - 2\ [9]$

أي : $+16^{3ن}\ 16^{ن} - 2 \equiv 6\ [9]$

إذن العدد : $+16^{3ن}\ 16^{ن} - 2$ لا يقبل القسمة على 9 من أجل : ن = 3 ك + 1 .

* الحالة الثالثة : ن = 3 ك + 2 / ك∈ط.

لدينا : $\equiv 16^{3ن}\ 1\ [9]$ و $16^{ن} \equiv 7^{ن}\ [9]$

ولكن : $7^{3ك+2} \equiv 4\ [9]$ (حسب السؤال السابق)

نستنتج أن : $16^{3\text{ن}} \equiv 1 \; [9]$ وَ $16^{\text{ن}} \equiv 4 \; [9]$ وَ $-2 \equiv -2 \; [9]$

$\Leftarrow 16^{3\text{ن}} + 16^{\text{ن}} - 2 \equiv 1 + 4 - 2 \; [9]$

أي : $16^{3\text{ن}} + 16^{\text{ن}} - 2 \equiv 3 \; [9]$

إذن العدد : $16^{3\text{ن}} + 16^{\text{ن}} - 2$ لا يقبل القسمة على 9 من أجل : ن = 3 ك + 2

النتيجة :

مجموعة قيم العدد الطبيعي ن التي من أجلها يكون العدد $16^{3\text{ن}} + 16^{\text{ن}} - 2$ قابلا القسمة على 9 هي :

{ن ∈ ط / ن = 3 ك وَ ك ∈ ط} .

5 – 2 : 1 – لدينا : $3^2 = 9$ إذن : $3^2 \equiv 2 \; [7]$

فيكون : $(3^2)^{\text{ن}} \equiv 2^{\text{ن}} \; [7]$ أي : $3^{2\text{ن}} \equiv 2^{\text{ن}} \; [7]$.

وبالتالي فإن : $3^{2\text{ن}} - 2^{\text{ن}} \equiv 0 \; [7]$ (حسب الخاصية 3 – 1)

نستنتج أن العدد : $3^{2\text{ن}} - 2^{\text{ن}}$ يقبل القسمة على 7 من أجل كل عدد طبيعي ن .

2 – لدينا : $5^2 = 25$ إذن : $5^2 \equiv 8 \; [17]$

ومنه : $5^2 \equiv 8 \; [17] \Leftrightarrow 5^2 \equiv 2^3 \; [17]$ (لأن : $2^3 = 8$)

$\forall \alpha \in$ ط : $5^2 \equiv 2^3 \; [17] \Rightarrow 5^{2\alpha} \equiv 2^{3\alpha} \; [17]$

لدينا : ($5^{2\alpha} \equiv 2^{3\alpha} \; [17]$ وَ $15 \equiv 15 \; [17]$) $\Rightarrow 15 \cdot 5^{2\alpha} \equiv 15 \cdot 2^{3\alpha} \; [17]$

أو $3 \cdot 5 \cdot 5^{2\alpha} \equiv (17 - 2) \cdot 2^{3\alpha} \; [17]$.

$3 \cdot 5^{2\alpha+1} \equiv 17 \cdot 2^{3\text{ن}} - 2 \cdot 2^{3\alpha} \; [17]$

$3 \cdot 5^{2\alpha+1} \equiv -2^{3\alpha+1} \; [17]$ (لأن $17 \cdot 2^{3\alpha} \equiv 0 \; [17]$)

$3 \cdot 5^{2\alpha+1} + 2^{3\alpha+1} \equiv 0 \; [17]$

$3 \cdot 5^{2(1+\alpha)-1} + 2^{3(1+\alpha)-2} \equiv 0 \; [17]$

بوضع ن $= \alpha + 1$ نستنتج أن :

$3 \cdot 5^{2\text{ن}-1} + 2^{3\text{ن}-2} \equiv 0 \; [17]$

النتيجة :

العدد $3 \cdot 5^{2\text{ن}-1} + 2^{3\text{ن}-2}$ يقبل القسمة على 17 من أجل كل عدد طبيعي ن .

3 – نعلم أن بواقي قسمة أي عدد طبيعي ن على 3 هي : 0 أو 1 أو 2.

∀ ن ∈ ط : ن ≡ 0 [3] أو ن ≡ 1 [3] أو ن ≡ 2 [3]

وعلى هذا الأساس نميز ثلاث حالات :

* **الحالة الأولى :** $\left.\begin{cases} \text{ن} \equiv 0\ [3] \\ \text{و} \\ \text{ن}^2 - 1 \equiv \text{ن}^2 - 1\ [3] \end{cases}\right\} \Leftarrow \text{ن}\,(\text{ن}^2 - 1) \equiv 0\ [3]$

* **الحالة الثانية :** $\text{ن} \equiv 1\ [3] \Leftarrow \text{ن}^2 \equiv 1\ [3]$ أي $\text{ن}^2 - 1 \equiv 0\ [3]$

$\left.\begin{cases} \text{ن} \equiv 1\ [3] \\ \text{و} \\ \text{ن}^2 - 1 \equiv 0\ [3] \end{cases}\right\} \Leftarrow \text{ن}\,(\text{ن}^2 - 1) \equiv 0\ [3]$

* **الحالة الثالثة :** $\text{ن} \equiv 2\ [3] \Leftarrow \text{ن}^2 \equiv 4\ [3]$ أي $\text{ن}^2 \equiv 1\ [3]$

فيكون : $\text{ن}^2 - 1 \equiv 0\ [3]$

$\left.\begin{cases} \text{ن} \equiv 2\ [3] \\ \text{و} \\ \text{ن}^2 - 1 \equiv 0\ [3] \end{cases}\right\} \Leftarrow \text{ن}\,(\text{ن}^2 - 1) \equiv 0\ [3]$

النتيجة : $\forall\ \text{ن} \in \underline{\text{ط}} : \text{ن}\,(\text{ن}^2 - 1) \equiv 0\ [3]$

مجموعة حاصل القسمة ص / ن ص

الهدف من الدرس :

حل المعادلات وجمل المعادلات وجمل المعادلات في حقل أو حلقة غير تامة.

المدة اللازمة لدراسة : 10 ساعة.

الدروس التي ينبغي الرجوع إليها :

1 – مجموعة الأعداد الصحيحة ص.

(القسمة الاقليدية في ص، القواسم والمضاعفات).

2 – الأعداد الأولية.

المراجع الخاصة بهذا الدرس :

كتاب الرياضيات 3 ث/ع + ر المعهد التربوي الوطني

تصميم الدرس

1 – مجموعة حاصل القسمة $\frac{ص}{ن ص}$

2 – بنية الحلقة $\left(\frac{ص}{ن ص} ، \dot{+} ، \dot{\times}\right)$

3 – كيفية تعيين نظيرة عنصر $\dot{س}$ في المجموعة $\frac{ص}{ن ص}$

4 – حل المعادلات في المجموعة $\frac{ص}{ن ص}$

5 – حل جمل المعادلات في المجموعة $\left(\frac{ص}{ن ص} \times \frac{ص}{ن ص}\right)$

6 – تمارين التصحيح الذاتي.

7 – أجوبة التصحيح الذاتي.

1 – مجموعة حاصل القسمة : $\frac{ص}{ن ص}$

1 – 1 مثال :

نعرّف في مجموعة الأعداد الصحيحة ص العلاقة الثنائية ع كما يلي :

$\forall$ أ $\in$ ص، $\forall$ ب $\in$ ص : أ ع ب $\Leftrightarrow$ E ك $\in$ ص / أ – ب = 3 ك

1 – بين أن ع علاقة تكافؤ .7

2 – عين أصناف التكافؤ واستنتج مجموعة حاصل القسمة $\frac{ص}{ع}$.

الحل :

1 – حتى تكون ع علاقة تكافؤ في المجموعة ص يجب أن تتحقق الخواص التالية : الإنعكاس – التناظر – التعدي

– خاصية الانعكاسية : $\forall$ أ $\in$ ص: أ – أ = 0 و منه أ – أ = 3 $\times$ 0

إذن أ ع أ . فالعلاقة ع إنعكاسية في ص

–خاصية التناظرية : $\forall$ أ $\in$ ص ، $\forall$ ب $\in$ ص :

أ ع ب ⇐ E ك ∈ ص / أ – ب = 3 ك... (1)

⇐ E ك ∈ ص / ب – أ = 3 (– ك)

(بضرب طرفي المساواة (1) في – 1)

⇐ E كَ ∈ ص / ب – أ = 3 كَ

(بوضع كَ = – ك و هو عدد صحيح)

⇐ ب ع أ فالعلاقة ع تناظرية في ص

– خاصية التعدّي : ∀ أ ∈ ص ، ∀ ب ∈ ص ، ∀ جـ ∈ ص :

{ أ ع ب وَ ب ع حـ } ⇐ { E ك ∈ ص / أ – ب = 3ك ....(1) ؛ E كَ ∈ ص / ب – جـ = 3كَ (2). }

[أ ع ب وَ ب ع جـ] ⇐ E (ك ، كَ) ∈ ص × ص / أ – ب +ب + جـ =3 ك + 3 كَ

(بجمع المساوتين (1) وَ (2))

[أ ع ب وَ ب ع جـ] ⇐ E (ك ، كَ) ∈ ص×ص / أ – جـ = 3(ك + كَ)

⇐ E كً ∈ ص / أ – جـ = 3 كً (بوضع كً = ك+ كَ)

⇐ أ ع جـ فالعلاقة ع متعدية في ص

* **النتيجة** : ع علاقة تكافؤ في المجموعة ص

2 – أصناف التكافؤ :

بما أن ع علاقة تكافؤ في المجموعة ص فإنها تجزئ المجموعة ص إلى أصناف تكافؤ، وكل صنف تكافؤ ممثل بعنصر أ من المجموعة ص معرّف كما يلي :

$\dot{أ}$ = {س ∈ ص/ س – أ = 3ك وَ ك ∈ ص}

$\dot{أ}$ = {س ∈ ص/ س = 3ك + أ وَ ك ∈ ص}

من أجل أ = 0، $\dot{0}$ = {س ∈ ص/ س = 3ك وَ ك ∈ ص} . (أي س مضاعف 3).

إذن : $\dot{0}$ = {. . ، (–3ك)، . . . ، –6 ، –3 ، 0 ، 3 ، 6 ، . . ، +3ك . .} و ك ∈ ط

من أجل أ = 1 : $\dot{1}$ = {س ∈ ص/ س = 3ك + 1 وَ ك ∈ ص}

إذن : $\dot{1}$ = {. . ، (–3ن – 1)، . . . ، –5 ، –2 ، +1 ، +4 ، . . ، (3ن + 1) ، . .} ون ∈ ط

من أجل أ = 2 ، $\dot{2}$ = {س ∈ ص/ س = 3ك + 2 وَ ك ∈ ص}

إذن : $\dot{2}=\{\ldots,(-3\text{ن}-2),\ldots,-4,-1,2,5,8,\ldots,(3\text{ن}+2),\ldots\}$ و ن ∈ ط

لما $\text{أ}\neq 0$ و $\text{أ}\neq 1$ وَ $\text{أ}\neq 2$ فإنه يمكننا كتابة العدد أ على أحد الأشكال التالية :

3 ك أو 3 ك + 1 أو 3 ك + 2 . ومنه أ ع 0 أو أ ع 1 أو أ ع 2 وهذا من أجل كل عدد صحيح أ

فتستنتج :

∀ أ ∈ ص ، $\dot{\text{أ}}=\dot{0}$ أو $\dot{\text{أ}}=\dot{1}$ أو $\dot{\text{أ}}=\dot{2}$ ومنه :

مجموعة حاصل القسمة $\frac{\text{ص}}{\text{ع}}$ هي : $\frac{\text{ص}}{\text{ع}}=\{\dot{0},\dot{1},\dot{2}\}$

نسمي هذه المجموعة حاصل القسمة ونرمز لها بالرمز :

$\frac{\text{ص}}{3\text{ص}}$ أو $\frac{\text{ص}}{[3]}$ ونكتب : $\frac{\text{ص}}{3\text{ص}}=\{\dot{0},\dot{1},\dot{2}\}$

1 – 2 تعريف :

بصورة عامة و من أجل كل عدد طبيعي ن حيث $\text{ن}\geq 2$ نسمي مجموعة حاصل القسمة ص على ن و نرمز لها $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$ أو $\frac{\text{ص}}{[\text{ن}]}$ مجموعة حاصل القسمة ص على ع

حيث ع علاقة ثنائية معرفة في المجموعة ص كما يلي :

∀ أ ∈ ص، ∀ ب ∈ ص : أ ع ب ⟺ ∃ ك ∈ ص / أ − ب = ن ك

ونكتب : $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}=\{\dot{0},\dot{1},\dot{2},\ldots,(\dot{\text{ن}-1})\}$.

1 – 3 مثال :

$\frac{\text{ص}}{4\text{ص}}=\{\dot{0},\dot{1},\dot{2},\dot{3}\}$ ، $\frac{\text{ص}}{6\text{ص}}=\{\dot{0},\dot{1},\dot{2},\dot{3},\dot{4},\dot{5}\}$

ملاحظات :

1 – المجموعة $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$ هي مجموعة منتهية من أجل كل ن من المجموعة ط − {0،1} وأصلي $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$ يساوي ن

2 – من أجل ن = 0 نجد المجموعة $\frac{\text{ص}}{0\text{ص}}$ تساوي المجموعة ص أي $\frac{\text{ص}}{0\text{ص}}=\text{ص}$

3 – من أجل ن = 1 نجد المجموعة $\frac{ص}{1\,ص}$ تساوي المجموعة $\{\dot{0}\}$ أي $\frac{ص}{1\,ص} = \{\dot{0}\}$.

1 – 4 تعريف عمليتين داخليتين في المجموعة $\frac{ص}{ن\,ص}$:

1 – 4 – 1 – مثال :

نعرف في المجموعة $\frac{ص}{5\,ص}$ العمليتين $\dot{+}$ وَ $\dot{\times}$ كالآتي :

$\forall\ \dot{أ} \in \frac{ص}{5\,ص}$ ، $\forall\ \dot{ب} \in \frac{ص}{5\,ص}$:

$\dot{أ}\dot{+}\dot{ب}=\dot{(أ+ب)}$ و $\dot{أ}\dot{\times}\dot{ب}=\dot{(أ\times ب)}$ حيث + وَ × هما على الترتيب عملية الجمع وعملية الضرب في المجموعة ص .

1 – أعط جدولي العمليتين.

2 – ماذا نستنتج ؟

الحل :

1 – نعلم من التعريف (1 – 2) أن المجموعة $\frac{ص}{5\,ص} = \{\dot{0}، \dot{1}، \dot{2}، \dot{3}، \dot{4}\}$

*** جدول العملية $\dot{+}$:**

$\dot{+}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$
$\dot{2}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$
$\dot{3}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{4}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$

لاحظ : $\dot{2}=\dot{(2+0)}=\dot{2}\dot{+}\dot{0}$

$\dot{1}=\dot{6}$ و $\dot{4}=\dot{(4+2)}=\dot{4}\dot{+}\dot{2}$

كذلك $\dot{7}=\dot{(3+4)}=\dot{3}\dot{+}\dot{4}$ و

$\dot{2}=\dot{7}$ إلخ . . .

*** جدول العملية $\dot{\times}$:**

$\dot{\times}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$	$\dot{0}$
$\dot{1}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dot{2}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{4}$	$\dot{1}$	$\dot{3}$
$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{3}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$	$\dot{2}$
$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{4}$	$\dot{3}$	$\dot{2}$	$\dot{1}$

لاحظ : $\dot{3}\dot{\times}\dot{0}=\dot{(3\times 0)}=\dot{0}$

$\dot{3}\dot{\times}\dot{2}=\dot{(3\times 2)}=\dot{6}$ و $\dot{6}=\dot{1}$

كذلك $\dot{4}\dot{\times}\dot{3}=\dot{(4\times 3)}=\dot{12}$ و

$\dot{12}=\dot{2}$ إلخ . . .

2 – نستنتج من خلال الجدولين السابقين أن العمليتين $\dot{+}$ ، $\dot{\times}$ داخليتين في المجموعة $\frac{\text{ص}}{5\text{ص}}$ لهما الخواص التالية :

* العملية $\dot{+}$ تبديلية وتقبل $\dot{0}$ عنصرًا حياديًا ولكل عنصر $\dot{\text{س}}$ من المجموعة $\frac{\text{ص}}{5\text{ص}}$ نظير هو $\dot{(5-\text{س})}$ بالنسبة للعملية $\dot{+}$

* العملية $\dot{\times}$ تبديلية وتقبل $\dot{1}$ عنصرًا حياديًا لها ولكل عنصر $\dot{\text{س}} \neq \dot{0}$ نظيرًا بالنسبة لهذه العملية.

الملاحظة :

من أجل عدد طبيعي ن العملية $\dot{+}$ و $\dot{\times}$ هما عمليتان داخليتان في المجموعة $\frac{\text{ص}}{5\text{ص}}$.

2 بنية الحلقة ($\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$ ، $\dot{+}$ ، $\dot{\times}$) :

2 – 1 نظرية :

($\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$ ، $\dot{+}$ ، $\dot{\times}$) هي حلقة تبديلية واحدية.

البرهان :

حتى تكون ($\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$ ، $\dot{+}$ ، $\dot{\times}$) حلقة تبديلية واحدية يجب أن يتحقق ما يلي :

* ($\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$ ، $\dot{+}$) زمرة تبديلية.

* العملية $\dot{\times}$ تبديلية وتجميعية وتوزيعية بالنسبة للعملية $\dot{+}$ وتقبل عنصرًا حياديًا في المجموعة $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$.

*خاصية التبديل : $\forall \dot{\text{أ}} \in \frac{\text{ص}}{\text{ن ص}} ، \forall \dot{\text{ب}} \in \frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$:

$\dot{\text{أ}} \dot{+} \dot{\text{ب}} = \overset{\bullet}{(\text{أ}+\text{ب})}$ (حسب تعريف العملية $\dot{+}$)

$\dot{\text{أ}} \dot{+} \dot{\text{ب}} = \overset{\bullet}{(\text{ب}+\text{أ})}$ (لأن عملية الجمع في ص تبديلية).

$\dot{\text{أ}} \dot{+} \dot{\text{ب}} = \dot{\text{ب}} \dot{+} \dot{\text{أ}}$ (حسب تعريف المجموعة $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$.

خاصية التجميع : $\forall \dot{\text{أ}} \in \frac{\text{ص}}{\text{ن ص}} ، \forall \dot{\text{ب}} \in \frac{\text{ص}}{\text{ن ص}} ، \forall \dot{\text{جـ}} \in \frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$

$\dot{\text{أ}} \dot{+} \left(\dot{\text{ب}} \dot{+} \dot{\text{جـ}}\right) = \dot{\text{أ}} \dot{+} \overset{\bullet}{(\text{ب} + \text{جـ})}$ (حسب تعريف العملية $\dot{+}$)

$= \overset{\bullet}{\left[(\text{أ}+\text{ب}) + \text{جـ}\right]}$ (لأن عملية الجمع (+) في المجموعة ص تجميعية.)

$= \overset{\bullet}{(\text{أ}+\text{ب})} \dot{+} \dot{\text{جـ}}$ (حسب تعريف العملية $\dot{+}$)

$= \left(\dot{\text{أ}} \dot{+} \dot{\text{ب}}\right) \dot{+} \dot{\text{جـ}}$ (حسب تعريف العملية $\dot{+}$)

إذن العملية $\dot{+}$ تجميعية في المجموعة $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$.

– العنصر الحيادي :

بما أن العملية $\dot{+}$ تبديلية يكفي أن نبرهن عن وجود العنصر الحيادي من اليمين فقط.

ليكن $\dot{\text{أ}}$ عنصرًا من $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$ ونفرض أنه يوجد $\dot{\text{هـ}}$ من المجموعة $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$

بحيث $\dot{\text{هـ}} \dot{+} \dot{\text{أ}} = \dot{\text{أ}}$

$\dot{\text{هـ}} \dot{+} \dot{\text{أ}} = \dot{\text{أ}} \Leftrightarrow \overset{\bullet}{\left(\overline{\text{هـ} + \text{أ}}\right)} = \dot{\text{أ}}$ (حسب تعريف العملية $\dot{+}$)

ومنه نستنتج (هـ + أ) – أ = ن ك (حسب تعريف المجموعة $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$) و ك $\in$ ص

إذن (هـ + أ) – أ = ن ك $\Leftrightarrow$ هـ = ن ك أي $\dot{\text{هـ}} = \dot{0}$ و $\dot{0} \in \frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$

العنصر $\dot{0}$ هو العنصر الحيادي بالنسبة للعملية $\dot{+}$ في المجموعة $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$

* العنصر النظير :

بما أن العملية $\dot{+}$ تبديلية يكفي أن نبرهن على وجود العنصر النظير من اليمين فقط.

ليكن $\dot{\text{أ}}$ عنصرًا من $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$ ونفرض أنه يوجد $(\dot{\text{أ}})'$ من $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$ بحيث : $\dot{\text{أ}} \dot{+} (\dot{\text{أ}})' = \dot{0} \Leftrightarrow \left[\overline{\text{أ} + (\text{أ})'}\right] = \dot{0}$ (حسب تعريف العملية $\dot{+}$)

ومنه أ + أَ = ن ك حيث ك عنصر من ص وَ أ < ن إذن $(\dot{\text{أ}})'$ موجود في المجموعة $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$ مع أَ = ن − أ لأن ن − أ < ن و بالتالي $(\dot{\text{أ}})'$ عنصر من $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$.

نستنتج أن لكل عنصر $\dot{\text{أ}}$ من المجموعة $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$

نظيرًا هو العنصر : $(\dot{\text{أ}})' = \left(\overline{\text{ن} - \text{أ}}\right)$

مثلاً : نظير $\dot{3}$ في المجموعة $\frac{\text{ص}}{5\text{ص}}$ بالنسبة للعملية $\dot{+}$ هو العنصر $\dot{2}$ لأن $\dot{2} = \left(\overline{5-3}\right)$.

النتيجة :

$\left(\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}} ، \dot{+}\right)$ زمرة تبديلية

* خاصة التبديل : $\forall\ \dot{\text{أ}} \in \frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$ ، $\forall\ \dot{\text{ب}} \in \frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$:

$\dot{\text{أ}} \dot{\times} \dot{\text{ب}} = \left(\overline{\text{أ} \times \text{ب}}\right)$ (حسب تعريف العملية $\dot{\times}$)

$\dot{\text{أ}} \dot{\times} \dot{\text{ب}} = \left(\overline{\text{ب} \times \text{أ}}\right)$ (لأن عملية الضرب في ص تبديلية).

$\dot{\text{أ}} \dot{\times} \dot{\text{ب}} = \dot{\text{ب}} \dot{\times} \dot{\text{أ}}$ (حسب تعريف العملية $\dot{\times}$)

إذن العملية $\dot{\times}$ تبديلية في المجموعة $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$.

* خاصة التجميع : $\forall\, \dot{\text{أ}} \in \frac{\text{ص}}{\text{ن ص}} ، \forall\, \dot{\text{ب}} \in \frac{\text{ص}}{\text{ن ص}} ، \forall\, \dot{\text{جـ}} \in \frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$

$\dot{\text{أ}} \dot{\times} (\dot{\text{ب}} \dot{\times} \dot{\text{جـ}}) = \dot{\text{أ}} \dot{\times} (\overline{\text{ب} \times \text{جـ}})$ (حسب تعريف العملية $\dot{\times}$)

$= [\overline{\text{أ} \times (\text{ب} \times \text{جـ})}]$ (حسب تعريف العملية $\dot{\times}$)

$= [\overline{(\text{أ} \times \text{ب}) \times \text{جـ}}]$ (لأن عملية الضرب (×) في المجموعة ص تجميعية.)

$= (\overline{\text{أ} \times \text{ب}}) \dot{\times} \dot{\text{جـ}}$ (حسب تعريف العملية $\dot{\times}$)

$\dot{\text{أ}} \dot{\times} (\dot{\text{ب}} \dot{\times} \dot{\text{جـ}}) = (\dot{\text{أ}} \dot{\times} \dot{\text{ب}}) \dot{\times} \dot{\text{جـ}}$ (حسب تعريف العملية $\dot{\times}$)

إذن العملية $\dot{\times}$ تجميعية في المجموعة $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$.

* خاصية التوزيع : لما أن العملية $\dot{\times}$ تبديلية في $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$ ، يكفي أن نبين أن العملية $\dot{\times}$ توزيعية بالنسبة للعملية $\dot{+}$ من اليمين فقط أي :

$\forall\, \dot{\text{أ}} \in \frac{\text{ص}}{\text{ن ص}} ، \forall\, \dot{\text{ب}} \in \frac{\text{ص}}{\text{ن ص}} ، \forall\, \dot{\text{جـ}} \in \frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$

$\dot{\text{أ}} \dot{\times} (\dot{\text{ب}} \dot{+} \dot{\text{جـ}}) = \dot{\text{أ}} \dot{\times} (\overline{\text{ب} + \text{جـ}})$ (حسب تعريف العملية $\dot{+}$).

$= [\overline{\text{أ} \times (\text{ب} + \text{جـ})}]$ (حسب تعريف العملية $\dot{\times}$).

$= [\overline{(\text{أ} \times \text{ب}) + (\text{أ} \times \text{جـ})}]$ (لأن عملية الضرب(×) توزيعية على عملية الجمع (+) في ص)

$\dot{\text{أ}} \dot{\times} (\dot{\text{ب}} \dot{+} \dot{\text{جـ}}) = (\overline{\text{أ} \times \text{ب}}) \dot{+} (\overline{\text{أ} \times \text{جـ}})$ (حسب تعريف العملية $\dot{+}$)

$= (\dot{\text{أ}} \dot{\times} \dot{\text{ب}}) \dot{+} (\dot{\text{أ}} \dot{\times} \dot{\text{جـ}})$ (حسب تعريف العملية $\dot{\times}$).

فالعملية $\dot{\times}$ توزيعية بالنسبة للعملية $\dot{+}$ في المجموعة $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$.

العنصر الحيادي :

بما أن العملية $\dot{\times}$ تبديلية يكفي أن نبرهن على وجود العنصر الحيادي للعملية $\dot{\times}$ من اليمين فقط.

ليكن $\dot{\text{أ}}$ عنصرًا من $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}} - \{ \dot{0} \}$ ونفرض أنه

يوجد $\dot{\text{هـ}}$ من المجموعة $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}} - \{\dot{0}\}$ بحيث $\dot{\text{هـ}} \,\dot{\times}\, \dot{\text{أ}} = \dot{\text{أ}}$

$\dot{\text{هـ}} \,\dot{\times}\, \dot{\text{أ}} = \dot{\text{أ}} \Leftrightarrow \overline{\text{هـ} \times \text{أ}} = \dot{\text{أ}}$ (حسب تعريف العملية $\dot{\times}$).

$\Leftrightarrow \left[\text{أ} \times \left(\overline{\text{هـ} - 1}\right)\right]$ (حسب تعريف العملية $\dot{\times}$) .

$\Leftrightarrow \dot{\text{أ}} \,\dot{\times}\, \left(\overline{\text{هـ} - 1}\right) = \dot{0}$ (حسب تعريف العملية $\dot{\times}$).

نستنتج أن $\dot{\text{هـ}} = \dot{1}$.إذن العنصر $\dot{1}$ هو العنصر الحيادي بالنسبة للعملية $\dot{\times}$ في المجموعة $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$.

النتيجة :

$\left(\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}} ، \dot{+} ، \dot{\times}\right)$ حلقة تبديلية واحدية

3 - كيفية تعيين نظير عنصر $\dot{\text{س}}$ في المجموعة $\left(\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}\right)$:

3 – 1 تعيين نظير عنصر $\dot{\text{س}}$ في المجموعة $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$ بالنسبة للعملية $\dot{+}$:

حسب (2 –1) العنصر النظير للعنصر $\dot{\text{س}}$ في المجموعة $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$ بالنسبة للعملية $\dot{+}$ هو العنصر $(\dot{\text{س}})' = \left(\overline{\text{ن} - \text{س}}\right)$.

3 - 2 - مثال :

نظير العنصر $\dot{4}$ في المجموعة $\frac{\text{ص}}{7\,\text{ص}}$ بالنسبة للعملية $\dot{+}$ هو العنصر $\dot{3}$ لأن $(\dot{4})' = \left(\overline{7 - 4}\right) = \dot{3}$.

3 – 3 - تعيين نظير $\dot{\text{س}}$ في المجموعة $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$ بالنسبة للعملية $\dot{\times}$:

3 - 3 -1 - نظرية :

العنصر $\dot{\text{س}}$ يقبل نظيرًا في المجموعة $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$ إذا وفقط إذا كان س وَ ن عددان أوليان فيما بينهما..

البرهان :

ليكن $\dot{س}$ عنصرًا من $\frac{ص}{ن ص}$ حيث س ون فيما بينهما، حسب نظرية " بيزوت "

يوجد على الأقل زوج مرتب (سَ ، ك) من المجموعة ص×ص يحقق ما يلي : س سَ − ن ك = 1 و منه :

س سَ = ن ك + 1 نجد س × سَ ≡1 [ن] (حسب تعريف علاقة الموافقة بترديد ن)

إذن $\overline{(س \times سَ)} = \dot{1} \Leftrightarrow \dot{س} \dot{\times} (\dot{س})' = \dot{1}$ (حسب تعريف العملية $\dot{\times}$)

نستنتج أن $(\dot{س})'$ هو نظير العنصر $\dot{س}$ بالنسبة للعملية $\dot{\times}$.

3 . 3 . 2 . مثال :

في المجموعة $\frac{ص}{6ص} = \{\dot{0}، \dot{1}، \dot{2}، \dot{3}، \dot{4}، \dot{5}\}$ نجد 5 و 6 أوليا فيها بينهما إذن العنصر $\dot{5}$ له نظير في المجموعة $\frac{ص}{6ص}$ بالنسبة للعملية $\dot{\times}$ وهو العنصر $\dot{5}$ نفسه (حالة خاصة).

3 − 3 − 3 مثال :

في المجموعة $\frac{ص}{7ص} = \{\dot{0}، \dot{1}، \dot{2}، \dot{3}، \dot{4}، \dot{5}، \dot{6}\}$

لاحظ 7 عدد أولي، من أجل كل عنصر $\dot{س} \neq \dot{0}$ من المجموعة $\frac{ص}{7ص}$ نجد س وَ 7 أوليان فيها بينهما لأن 0 < س < 7 وَ 7 عدد أولي .

إذن كل عنصر $\dot{س} \neq \dot{0}$ يقبل نظيراً في المجموعة $\frac{ص}{7ص}$ بالنسبة للعملية $\dot{\times}$

مثلاً : نظير $\dot{2}$ هو العنصر $\dot{4}$ لأن : $\dot{2} \dot{\times} \dot{4} = \overline{(2 \times 4)} = \dot{8}$ وَ $\dot{8} = \dot{1}$ إذن $\dot{2} \dot{\times} \dot{4} = \dot{1}$.

3 − 3 − 4 − نظرية :

ليكن ن عددًا طبيعيًا حيث ن ≥ 2.

$\left(\frac{ص}{ن ص}، \dot{+}، \dot{\times}\right)$ حقل ⟺ ن عدد أولي .

البرهان : يجب أن نبين :

1 - ($\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$ ، $\dot{+}$ ، $\dot{\times}$) حقل $\Leftarrow$ ن عدد أولي.

2 – ن عدد أولي $\Leftarrow$ ($\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$ ، $\dot{+}$ ، $\dot{\times}$) حقل

1 – نفرض أن ($\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$ ، $\dot{+}$ ، $\dot{\times}$) حقل وَ ن ليس أوليا.

إذن يوجد (أ ، ب) $\in$ (ط – { 0 }) × (ط – { 0 }) بحيث أ × ب = ن

ينتج $\dot{\text{أ}}\dot{\times}\dot{\text{ب}}=\dot{0}$ مع $\dot{\text{أ}}\neq\dot{0}$ وَ $\dot{\text{ب}}\neq\dot{0}$ مستحيل لأن ($\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$ ، $\dot{+}$ ، $\dot{\times}$) حقل فهو لا يحتوي على قواسم للصفر، فنستنتج أن ن أولي.

2 – نفرض أن ن عدد أولي، إذن مهما يكن $\dot{\text{أ}}$ من $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$ حيث $\dot{\text{أ}}\neq\dot{0}$ فإن أ ليس من مضاعفات ن (لأن $0<$ أ $<$ ن) نستنتج أن العددأ وَ العدد ن أوليان فيما بينهما ومنه حسب النظرية (3 – 3 – 1) العنصر $\dot{\text{أ}}$ له نظير في المجموعة $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$ ، أي من أجل كل عنصر من المجموعة $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$ حيث ($\dot{\text{س}}\neq\dot{0}$) له نظير بالنسبة للعملية $\dot{\times}$. إذن ($\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$ ، $\dot{+}$ ، $\dot{\times}$) حقل.

ملاحظات :

1 - إذا كان ن عدد أولي فإن($\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$ ، $\dot{+}$ ، $\dot{\times}$) حلقة تامة (لا تحوي قواسم للصفر). مثلاً($\frac{\text{ص}}{\text{5 ص}}$ ، $\dot{+}$ ، $\dot{\times}$)هي حلقة تامة لأن العدد 5 أولي .

2 – إذا كان العدد ن ليس أوليا فإن($\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$ ، $\dot{+}$ ، $\dot{\times}$) حلقة ليست تامة.

3 – 3 – 5 تعيين نظير العنصر $\dot{\text{س}}$ بالنسبة للعملية $\dot{\times}$ عندما يكون س وَ ن أوليين فيما بينهما :

نستخدم إحدى الطرق الآتية وهذا حسب الفرضيات :

1 – إما أن تكون عن طريق تشكيل جدول الضرب في المجموعة $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$ وهذه الحالة تستعمل عندما يكون العدد ن صغيراً.

2 – نبحث عن عنصر $\dot{\text{غ}}$ من $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$ حيث : $\dot{\text{س}}\dot{\times}\dot{\text{غ}}=\dot{1}$

3 – إما أن نحل المعادلة س ع + ن ك = 1 حيث المجهولين هما ع و ك (أو نحل س ع ≡ 1 [ن].)

3 – 3 – 6 – مثال :

أوجد نظير كل عنصر من المجموعة $\{\dot{3}، \dot{4}، \dot{8}\}$ في المجموعة $\frac{\text{ص}}{\text{13 ص}}$ بالنسبة للعملية $\dot{\times}$

الحل : لدينا 13 أولي، ($\frac{\text{ص}}{\text{13 ص}}$ ، $\dot{+}$ ، $\dot{\times}$) حلقة تامة. ولكل عنصر من المجموعة $\frac{\text{ص}}{\text{13 ص}}$. نظير بالنسبة للعملية $\dot{\times}$

من الجدول :

$\dot{\times}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$	$\dot{7}$	$\dot{8}$	$\dot{9}$	$\dot{10}$	$\dot{11}$	$\dot{12}$
$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{3}$	$\dot{6}$	$\dot{9}$	$\dot{12}$	$\dot{2}$	$\dot{5}$	$\dot{8}$	$\dot{11}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$	$\dot{7}$	$\dot{11}$

إن نظير $\dot{3}$ هو العنصر $\dot{9}$ بالنسبة للعملية $\dot{\times}$ (باستعمال الطريقة الأولى).

– واضح : 4 × 10 = 40 ومنه $\dot{4}\dot{\times}\dot{10}=\dot{1}$ إذن نظير $\dot{4}$ هو العنصر $\dot{10}$ بالنسبة للعملية $\dot{\times}$ في المجموعة $\frac{\text{ص}}{\text{13 ص}}$ (باستعمال الطريقة الثانية).

– البحث عن نظير العنصر $\dot{8}$ بالنسبة للعملية $\dot{\times}$ في المجموعة $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$:

هذا يؤدي إلى حل المعادلة 8 س + 13 ك = 1 ولذلك نستخدم خوارزمية إقليدس.

لدينا :

13 = 8 × 1 + 5 ⇔ 13 – 8 × 1 = 5 .... (1)

8 = 5 × 1 + 3 ⇔ 8 – 5 × 1 = 3 .... (2)

5 = 3 × 1 + 2 ⇔ 5 – 3 × 1 = 2 .... (3)

3 = 2 × 1 + 1 ⇔ 3 – 2 × 1 = 1 .

ومنه :

3 – 2× 1 =1 ⇔ 3 – (5 – 3 × 1) × 1 = 1 (بتعويض 2 من المساواة (3)).

$.1 = 1 \times 3 + 1 \times 5 - 3 \Leftrightarrow 1 = 2 - 3$

$.1 = 1 \times 5 - 2 \times 3 \Leftrightarrow 1 = 1 \times 2 - 3$

نجد $3\times 2 - 5 \times 1 = 1 \Leftrightarrow (8 - 5 \times 1)\times 2 - 5 \times 1 = 1$ (بتعويض 3 من المساواة (2))

$1 = 1 \times 5 - 2 \times 5 - 2 \times 8 \Leftrightarrow 1 = 1\times 5 - 2 \times 3$

$1 = 3 \times 5 - 2 \times 8 \Leftrightarrow 1 = 1\times 5 - 2 \times 3$

أخيراً : $8 \times 2 - 5 \times 3 = 1 \Leftrightarrow 1 = 3 \times (1 \times 8 - 13) - 2 \times 8$ (بتعويض 5 بقيمتها)

$1 = 3 \times 8 + 3 \times 13 - 2 \times 8 \Leftrightarrow 1 = 3 \times 5 - 2 \times 8$

$1 = 3 \times 13 - 5 \times 8 \Leftrightarrow$

$1 + 3 \times 13 = 5 \times 8 \Leftrightarrow$

نستنتج أن $8 \times 5 \equiv 1\ [13]$ أي $\dot{8}\,\dot{\times}\,\dot{5} = \dot{1}$ إذن نظير العنصر $\dot{8}$ هو العنصر $\dot{5}$ بالنسبة للعملية $\dot{\times}$

4 - حل المعادلات في المجموعة : $\frac{ص}{ن\,ص}$

1 - تذكير :

1 – نعلم أنه إذا كان ن عددًا أوليا فإن المجموعة $\frac{ص}{ن\,ص}$ حقل وعلية نحصل على معادلات متكافئة عند الضرب أو القسمة على أي عنصر $\dot{س}$ من المجموعة $\frac{ص}{ن\,ص}$ لأنها لا تحتوي على قواسم للصفر

2 – عندما يكون ن ليس أولياً فإن القاعدة السابقة محققة فقط بالنسبة للعناصر التي تقبل نظيراً بالنسبة للعملية $\dot{\times}$ لكن تكون خاطئة بالنسبة لقواسم الصفر لأن في هذه الحالة هذه العناصر ليست إعتيادية بالنسبة للعملية $\dot{\times}$.

4 - 1 حل المعادلات من الشكل $\dot{أ}\,\dot{\times}\,\dot{س} \dot{+} \dot{ب} = \dot{0}$:

4 – 1 – 1 مثال : حل في المجموعة $\frac{ص}{5\,ص}$ ثم في المجموعة $\frac{ص}{6\,ص}$ المعادلة :

$\dot{3}\,\dot{\times}\,\dot{س} \dot{+} \dot{1} = \dot{0}$

الحل :

لدينا 5 عدد أولي إذن ($\frac{ص}{ن ص}$ ، $\dot{+}$ ، $\dot{\times}$) حلقة تامة وبالتالي لكل عنصر نظير بالنسبة للعملية $\dot{\times}$.

$\dot{3}\dot{\times}$س$\dot{+}\dot{1} = \dot{0}$ ...... (1) $\Leftrightarrow$ $\dot{3}\dot{\times}$س$\dot{+}\dot{1}\dot{+}\dot{4} = \dot{0}\dot{+}\dot{4}$ (بإضافة $\dot{4}$ لطرفي المساواة (1) لأنه نظير $\dot{1}$ بالنسبة للعملية $\dot{+}$

(1) $\Leftrightarrow$ $\dot{3}\dot{\times}$س$\dot{+}\dot{5} = \dot{4}$

$\Leftrightarrow$ $\dot{3}\dot{\times}$س$\dot{+}\dot{0} = \dot{4}$ (لأن $\dot{5} = \dot{0}$)

$\Leftrightarrow$ $\dot{3}\dot{\times}$س $= \dot{4}$ . . . . . (2)

$\Leftrightarrow$ $\dot{2}\dot{\times}\dot{3}\dot{\times}$س $= \dot{2}\dot{\times}\dot{4}$ (بضرب طرفي المساواة (2) في $\dot{2}$ لأنه نظير $\dot{3}$ بالنسبة للعملية $\dot{\times}$)

(1) $\Leftrightarrow$ س $= \dot{3}$

فالمعادلة تقبل حلاً وحيدًا هو $\dot{3}$ ، في المجموعة $\frac{ص}{5ص}$.

* الحل في المجموعة $\frac{ص}{6ص}$:

لدينا 6 ليس بعدد أولي إذن المجموعة $\frac{ص}{6ص}$ حلقة غير تامة.

لاحظ العدد 3 ليس بعدد أولي مع العدد 6 إذن العنصر $\dot{3}$ هو أحد قواسم الصفر في المجموعة $\frac{ص}{6ص}$.

ومنه $\dot{3}\dot{\times}$س$\dot{+}\dot{1} = \dot{0}$ .... (1) $\Leftrightarrow$ $\dot{3}\dot{\times}$س$\dot{+}\dot{1}\dot{+}\dot{5} = \dot{0}\dot{+}\dot{5}$ (بإضافة العنصر $\dot{5}$ لطرفي المساواة (1) لأنه نظير العنصر $\dot{1}$)

(1) $\Leftrightarrow$ $\dot{3}\dot{\times}$س$\dot{+}\dot{6} = \dot{5}$

$\Leftrightarrow$ $\dot{3}\dot{\times}$س$\dot{+}\dot{0} = \dot{5}$

$\Leftrightarrow$ $\dot{3}\dot{\times}$س $= \dot{5}$

لنشكل جدول الضرب النسبي للعنصر $\dot{3}$ في المجموعة $\frac{ص}{6ص}$

س	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$
$\dot{3}\dot{\times}\dot{س}$	$\dot{0}$	$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{3}$	$\dot{0}$	$\dot{3}$

نلاحظ أنه لا يوجد أي عنصر $\dot{س}$ من المجموعة $\frac{\text{ص}}{6\,\text{ص}}$ يحقق المساواة $\dot{3}\dot{\times}\dot{س}=\dot{5}$. إذن المعادلة : $\dot{3}\dot{\times}\dot{س}\dot{+}\dot{1}=\dot{0}$ لا تقبل حلولاً في المجموعة $\frac{\text{ص}}{6\,\text{ص}}$.

4 – 2 حل المعادلات من الشكل : $\dot{أ}س^{2}\dot{+}\dot{ب}س\dot{+}\dot{جـ}=\dot{0}$ حيث $(\dot{أ}\neq\dot{0})$:

حل هذا النوع من المعادلات يستدعي استخدام إحدى هذه الطرق :

1 – إذا كان ن عدداً صغيراً نستعمل جدولي الجمع والضرب، ثم نعوض س بكل العناصر المتتابعة للمجموعة $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$.

2 – إذا كان ن عددًا أوليا، نضرب طرفي المعادلة بنظير العنصر $\dot{أ}$ بالنسبة للعملية $\dot{\times}$ونحل المعادلة المكافئة. $س^{2}\dot{+}(\dot{ب})'\,س\dot{+}(\dot{جـ})'=\dot{0}$

حيث $(\dot{ب})'=\dot{ب}\dot{\times}(\dot{أ})'$ و $(\dot{جـ})'=\dot{جـ}\dot{\times}(\dot{أ})'$

ثم نكتب المعادلة على الشكل التالي :

$$\left[س\dot{+}(\dot{2})'(\dot{ب})'\right]^{2}=\left[(\dot{2})'\right]^{2}\dot{\times}\left[(\dot{ب})'\right]^{2}-(\dot{جـ})'$$

حيث $(\dot{2})'$ هو نظير $\dot{2}$ بالنسبة للعملية $\dot{\times}$

4 – 2 – 1 مثال : حل المعادلة التالية : $س^{2}-\dot{4}س\dot{+}\dot{3}=\dot{0}$ في المجموعة $\frac{\text{ص}}{11\,\text{ص}}$ ثم في المجموعة $\frac{\text{ص}}{6\,\text{ص}}$.

الحل :

* الحل في المجموعة $\frac{\text{ص}}{11\,\text{ص}}$:

لدينا 11 عدد أولي، $(\frac{\text{ص}}{11\,\text{ص}}, \dot{+}, \dot{\times})$ حقل فهو لا يحوي قواسم للصفر ونلاحظ أن $\dot{1}$ هو حل ظاهر لهذه المعادلة، نستنتج أن :

$س^{2}-\dot{4}س\dot{+}\dot{3}=\dot{0} \Leftrightarrow (س-\dot{1})(س-\dot{3})=\dot{0}$.

$\Leftrightarrow$ س $- \dot{1} = \dot{0}$ أو س $- \dot{3} = \dot{0}$.

$\Leftrightarrow$ س $= \dot{1}$ أو س $= \dot{3}$.

مجموعة الحلول هي $\{\dot{1} ، \dot{3}\}$.

* الحل في المجموعة $\frac{\text{ص}}{6\text{ص}}$: لدينا العدد 6 ليس أوليا إذن : $\left(\frac{\text{ص}}{6\text{ص}} ، \dot{+} ، \dot{\times}\right)$ حلقة غير تامة وعليه

فالمجموعة $\frac{\text{ص}}{6\text{ص}}$ تحوي قواسم للصفر وهي : $\{\dot{2} ، \dot{3} ، \dot{4}\}$

نجد: $\text{س}^2 - \dot{4}\text{س} \dot{+} \dot{3} = \dot{0} \Leftrightarrow \left(\text{س} - \dot{2}\right)^2 - \dot{4} \dot{+} \dot{3} = \dot{0}$

$\Leftrightarrow \left(\text{س} - \dot{2}\right)^2 = \dot{1}$

نضع $\mathbf{س}$ = س $- \dot{2}$ وَ $\mathbf{س}^2 = \dot{1}$ ثم نبحث عن الجذور التربيعية في المجموعة $\frac{\text{ص}}{6\text{ص}}$ حيث تربيعها يساوي $\dot{1}$. حسب الجدول التالي :

$\mathbf{س}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$
$\mathbf{س}^2$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{1}$

نستنتج أن $\mathbf{س}^2 = \dot{1} \Leftrightarrow \mathbf{س} = \dot{1}$ أو $\mathbf{س} = \dot{5}$

بما أن $\mathbf{س}$ = س $- \dot{2}$ إذن $\left(\text{س} - \dot{2}\right)^2 = \dot{1} \Leftrightarrow$ س $- \dot{2} = \dot{1}$ أو س $- \dot{2} = \dot{5}$ أي س $= \dot{3}$ أو س $= \dot{1}$ ومجموعة الحلول هي $\{\dot{1} ، \dot{3}\}$.

5 – حل جمل المعادلات في المجموعة : $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}} \times \frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$

ملاحظة :

إذا كان ن ليس عددًا أوليا فإن المجموعة $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$ تحوي قواسم للصفر و لذلك قبل حل جملة معادلتين في المجموعة $\frac{\text{ص}}{\text{ن ص}} \times \frac{\text{ص}}{\text{ن ص}}$. يجب معرفة مجموعة قواسم الصفر.

لأن : $\alpha \dot{\times} \beta = \dot{0} \Leftarrow \left[\alpha = \dot{0} \text{ أو } \beta = \dot{0}\right]$ وكل قواسم الصفر تحقق ذلك.

5 – 1 مثال : حل في المجموعة $\frac{\text{ص}}{7\text{ص}}\times\frac{\text{ص}}{7\text{ص}}$ ثم في المجموعة $\frac{\text{ص}}{15\text{ص}}\times\frac{\text{ص}}{15\text{ص}}$ الجملة :

$$\begin{cases} \dot{3}\,\text{س} \dot{+} \dot{3}\,\text{ع} = \dot{3} \\ \dot{2}\,\text{س} \dot{+} \dot{1}\,\text{ع} = \dot{5} \end{cases}$$

الحل :

* الحل في المجموعة $\frac{\text{ص}}{7\text{ص}}\times\frac{\text{ص}}{7\text{ص}}$:

7 عدد أولي ، فالمجموعة $\frac{\text{ص}}{7\text{ص}}$ حقل وبالتالي $\dot{3}$ إعتيادي بالنسبة للعملية $\dot{\times}$

نستنتج :

$$\begin{cases} \dot{3}\,\text{س} \dot{+} \dot{3}\,\text{ع} = \dot{3} \\ \text{وَ} \\ \dot{2}\,\text{س} \dot{+} \dot{1}\,\text{ع} = \dot{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{3}\left(\dot{1}\,\text{س} \dot{+} \dot{1}\,\text{ع}\right) = \dot{3}\dot{\times}\dot{1} \\ \text{وَ} \\ \dot{2}\,\text{س} \dot{+} \dot{1}\,\text{ع} = \dot{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{س} \dot{+} \text{ع} = \dot{1} \\ \text{وَ} \\ \dot{2}\,\text{س} \dot{+} \dot{1}\,\text{ع} = \dot{5} \end{cases}$$

(لأن $\dot{3}$ عنصر اعتيادي للعملية $\dot{\times}$ وَ $\dot{1}$ عنصر حيادي بالنسبة للعملية $\dot{\times}$)

$$\begin{cases} \text{ع} = \dot{1} - \text{س} \\ \text{وَ} \\ \dot{2}\,\text{س} \dot{+} \dot{1} - \text{س} = \dot{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ع} = \dot{1} - \text{س} \\ \text{وَ} \\ \text{س} \dot{+} \dot{1} = \dot{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ع} = \dot{1} - \text{س} \\ \text{وَ} \\ \text{س} = \dot{4} \end{cases}$$

ومنه ع = $\left(-\dot{3}\right)$ أي ع = $\dot{4}$ وَ س = $\dot{4}$

الجملة تقبل حلاً و حيدًا هو $(\dot{4}\text{،}\dot{4})$ في المجموعة $\frac{\text{ص}}{7\text{ص}}\times\frac{\text{ص}}{7\text{ص}}$.

* الحل في المجموعة $\frac{\text{ص}}{15\text{ص}}\times\frac{\text{ص}}{15\text{ص}}$:

المجموعة $\frac{\text{ص}}{15\text{ص}}$ حلقة غير تامة لأن العدد 15 ليس أوليًا.

ومجموعة قواسم الصفر هي : $\left\{\dot{3}\text{، }\dot{5}\text{، }\dot{6}\text{، }\dot{9}\text{، }\dot{10}\text{، }\dot{12}\right\}$

لاحظ $\dot{3}\alpha=\dot{0} \Leftrightarrow (\alpha=\dot{0}$ أو $\alpha=\dot{5}$ أو $\alpha=\dot{10})$ لأن $\frac{\text{ص}}{15\text{ص}}$ حلقة غير تامة.

$$\begin{cases} \dot{3}\text{س}+\dot{3}\text{ع}=\dot{3} \\ \text{و} \\ \dot{2}\text{س}+\dot{1}\text{ع}=\dot{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{3}\text{س}+\dot{3}\text{ع}-\dot{3}=\dot{0} \\ \text{و} \\ \dot{2}\text{س}+\dot{1}\text{ع}=\dot{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{3}\times\left(\dot{1}\text{س}+\dot{1}\text{ع}\right)-\dot{1}=\dot{0}\ldots(1) \\ \text{و} \\ \dot{2}\text{س}+\dot{1}\text{ع}=\dot{5}\ldots(2) \end{cases}$$

المعادلة (1) : $\dot{3}\times\left(\dot{1}\text{س}+\dot{1}\text{ع}-\dot{1}\right)=\dot{0}$

(1) $\Leftrightarrow (\dot{1}\text{س}+\dot{1}\text{ع}-\dot{1}=\dot{0}$ أو $\dot{1}\text{س}+\dot{1}\text{ع}-\dot{1}=\dot{5}$ أو $\dot{1}\text{س}+\dot{1}\text{ع}-\dot{1}=\dot{10})$

(بوضع $\alpha=\dot{1}\text{س}+\dot{1}\text{ع}-\dot{1}$ وحسب الملاحظة السابقة)

$$\begin{cases} \dot{3}\text{س}+\dot{3}\text{ع}=\dot{3} \\ \text{و} \\ \dot{2}\text{س}+\dot{1}\text{ع}=\dot{5} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\underbrace{\begin{cases} \dot{1}\text{س}+\dot{1}\text{ع}-\dot{1}=\dot{0} \\ \text{و} \\ \dot{2}\text{س}+\dot{1}\text{ع}=\dot{5} \end{cases}}_{(\mathrm{I})} \text{ أو } \underbrace{\begin{cases} \dot{1}\text{س}+\dot{1}\text{ع}-\dot{1}=\dot{5} \\ \text{و} \\ \dot{2}\text{س}+\dot{1}\text{ع}=\dot{5} \end{cases}}_{(\mathrm{II})} \text{ أو } \underbrace{\begin{cases} \dot{1}\text{س}+\dot{1}\text{ع}-\dot{1}=\dot{10} \\ \text{و} \\ \dot{2}\text{س}+\dot{1}\text{ع}=\dot{5} \end{cases}}_{(\mathrm{III})} \right.$$

* حل الجملة (I) :

$$\begin{cases} \dot{1}\text{س}+\dot{1}\text{ع}-\dot{1}=\dot{0} \\ \text{و} \\ \dot{2}\text{س}+\dot{1}\text{ع}=\dot{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{1}\text{س}+\dot{1}\text{ع}=\dot{1}\ldots\ldots(1') \\ \text{و} \\ \dot{2}\text{س}+\dot{1}\text{ع}=\dot{5}\ldots(2') \end{cases}$$

بما أن العدد 14 أولي مع العدد 15 فإن العنصر $\dot{14}$ ليس من قواسم الصفر.

فالمعادلة (1)' : $\dot{1}\text{س} \dot{+} \dot{1}\text{ع} = \dot{1} \Leftrightarrow \dot{14}\text{س} \dot{+} \dot{14}\text{ع} = \dot{14}$

نستنتج أن :

$$\begin{cases} \dot{1}\text{س} \dot{+} \dot{1}\text{ع} = \dot{1} \\ \text{و} \\ \dot{2}\text{س} \dot{+} \dot{1}\text{ع} = \dot{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{14}\text{س} \dot{+} \dot{14}\text{ع} = \dot{14} \ldots\ldots (1)'' \\ \text{و} \\ \dot{2}\text{س} \dot{+} \dot{1}\text{ع} = \dot{5} \ldots\ldots (2)'' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{16}\text{س} \dot{+} \dot{15}\text{ع} = \dot{19} \\ \text{و} \\ \dot{2}\text{س} \dot{+} \dot{1}\text{ع} = \dot{5} \end{cases}$$

(بجمع (1)'' مع (2)'')

$$\begin{cases} \dot{1}\text{س} = \dot{4} \quad \left(\text{لأن } \dot{16} = \dot{1} \text{ و } \dot{15} = \dot{0} \text{ و } \dot{19} = \dot{4} \right) \\ \text{و} \\ \dot{2}\text{س} \dot{+} \dot{1}\text{ع} = \dot{5} \end{cases} \qquad \text{إذن س} = \dot{4}$$

ثم نعوض قيمة س في المعادلة (1)' نجد $\dot{4} \dot{+} \dot{1}\text{ع} = \dot{1}$ .... (3)

$$\dot{4} \dot{+} \dot{1}\text{ع} = \dot{1} \Leftrightarrow \dot{4} \dot{+} \dot{11} \dot{+} \dot{1}\text{ع} = \dot{1} \dot{+} \dot{11}$$

(بإضافة $\dot{11}$ إلى طرفي المساواة (3) لأنه نظير $\dot{4}$ بالنسبة للعملية $\dot{+}$)

$$\Leftrightarrow \dot{15} \dot{+} \dot{1}\text{ع} = \dot{12} \Leftrightarrow \dot{1}\text{ع} = \dot{12} \quad \left(\text{لأن } \dot{15} = \dot{0} \right)$$

ومنه ع $= \dot{12}$ (لأن $\dot{1}$ عنصر حيادي بالنسبة للعملية $\dot{\times}$).

فالجملة (I) تقبل حلاً وحيدًا هو ($\dot{4}$ ، $\dot{12}$). ونترك لك حل الجملة (I) بطريقة توحيد الأمثال وجمع أو طرح المعادلات.

* حل الجملة (II) :

$$\begin{cases} \dot{1}\text{س} \dot{+} \dot{1}\text{ع} - \dot{1} = \dot{5} \\ \text{و} \\ \dot{2}\text{س} \dot{+} \dot{1}\text{ع} = \dot{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{1}\text{س} \dot{+} \dot{1}\text{ع} = \dot{6} \ldots\ldots (1)' \\ \text{و} \\ \dot{2}\text{س} \dot{+} \dot{1}\text{ع} = \dot{5} \ldots\ldots (2)' \end{cases}$$

بنفس طريقة حل الجملة (I) نستنتج أن :

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{1}س \dot{+} \dot{1}ع = \dot{6}\\ و\\ \dot{2}س \dot{+} \dot{1}ع = \dot{5}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\dot{14}س \dot{+} \dot{14}ع = \dot{14} \dot{\times} \dot{6}\\ و\\ \dot{2}س \dot{+} \dot{1}ع = \dot{5}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\dot{14}س \dot{+} \dot{14}ع = \dot{84}\\ و\\ \dot{2}س \dot{+} \dot{1}ع = \dot{5}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\dot{14}س \dot{+} \dot{14}ع = \dot{9}\\ و\\ \dot{2}س \dot{+} \dot{1}ع = \dot{5}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\dot{16}س \dot{+} \dot{15}ع = \dot{14}\\ و\\ \dot{2}س \dot{+} \dot{1}ع = \dot{5}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\dot{1}س = \dot{14} \text{ أي } س = \dot{14}\\ و\\ \dot{2}س \dot{+} \dot{1}ع = \dot{5}\end{array}\right.$$

ثم نعوض قيمة س في المعادلة (1)' نجد :

$$\dot{14} \dot{+} \dot{1}ع = \dot{6} \Leftrightarrow \dot{1} \dot{+} \dot{14} \dot{+} \dot{1}ع = \dot{6} \dot{+} \dot{1} \text{ و منه } \dot{15}س \dot{+} \dot{1}ع = \dot{7} \Leftrightarrow \dot{1} \dot{\times} ع = \dot{7}$$

أي $ع = \dot{7}$

والجملة (II) تقبل حلاً وحيدًا هو $(\dot{14} ، \dot{7})$

ملاحظة :

يمكنك حل الجملة(II) بطريقة توحيد الأمثال ثم جمع أو طرح المعادلات .

* حل الجملة (III)

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{1}س \dot{+} \dot{1}ع - \dot{1} = \dot{6}\\ و\\ \dot{2}س \dot{+} \dot{1}ع = \dot{5}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\dot{1}ع = \dot{10} \dot{+} \dot{1} - \dot{1}س\\ و\\ \dot{2}س \dot{+} \dot{1}ع = \dot{5}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll}\dot{1}س = \dot{11} - \dot{1}س & (1)'\\ و & \\ \dot{2}س \dot{+} \dot{1}ع = \dot{5} \ldots & (2)'\end{array}\right.$$

بتعويض قيمة ع الناتجة عن المعادلة الأولى (1)' في المعادلة (2)' نجد :

$$\dot{2}س \dot{+} \left(\dot{11} - \dot{1}س\right) = \dot{5} \Leftrightarrow \dot{2}س \dot{+} \dot{11} - \dot{1}س = \dot{5}$$

$$\Leftrightarrow \dot{1}س \dot{+} \dot{11} = \dot{5}$$

$$\Leftrightarrow \dot{1}س \dot{+} \dot{11} \dot{+} \dot{4} = \dot{5} \dot{+} \dot{4}$$

$$\Leftrightarrow \dot{1}\text{س} \dotplus \dot{15} = \dot{9} \Leftrightarrow \dot{1}\text{س} = \dot{9}$$ أي $\text{س} = \dot{9}$

ومنه ($\text{ع} = \dot{11} - \dot{1}\,\text{س}$ وَ $\text{س} = \dot{9}$) $\Leftarrow \text{ع} = \dot{11} - \dot{9} = \dot{2}$ إذن $\text{ع} = \dot{2}$

فالجملة (III) تقبل حلا وحيدًا هو $(\dot{9} ، \dot{2})$

***الخلاصة :**

مجموعة حلول الجملة : $\left\{ \begin{array}{l} \dot{3}\text{س} \dotplus \dot{3}\text{ع} = \dot{3} \\ \text{وَ} \\ \dot{2}\text{س} \dotplus \dot{1}\text{ع} = \dot{5} \end{array} \right.$ في المجموعة $\dfrac{\text{ص}}{15\text{ص}} \times \dfrac{\text{ص}}{15\text{ص}}$

هي : $\left\{ (\dot{4} ، \dot{12}) ; (\dot{14} ، \dot{7}) ; (\dot{9} ، \dot{2}) \right\}$

6 - تمارين التصحيح الذاتي :

6 – 1 حل في المجموعة $\dfrac{\text{ص}}{7\text{ص}}$ ثم في المجموعة $\dfrac{\text{ص}}{8\text{ص}}$ المعادلة :

$\dot{2}\,\text{س} \dotplus \dot{6} = \dot{3}$. (1)

6 – 2 حل في المجموعة $\dfrac{\text{ص}}{13\text{ص}}$ ثم في المجموعة $\dfrac{\text{ص}}{10\text{ص}}$ المعادلة :

$\text{س}^2 \dotplus \text{س} - \dot{2} = \dot{0}$

6 – 3 – أ – حل في المجموعة $\dfrac{\text{ص}}{6\text{ص}}$ المعادلة : $\dot{2} \,\dot{\times}\, \text{س} = \dot{0}$

ب – حل في المجموعة $\dfrac{\text{ص}}{6\text{ص}} \times \dfrac{\text{ص}}{6\text{ص}}$ الجملة : $\left\{ \begin{array}{l} \dot{2}\text{س} \dotplus \dot{4}\text{ع} = \dot{2} \\ \text{وَ} \\ \dot{1}\text{س} \dotplus \dot{5}\text{ع} = \dot{2} \end{array} \right.$

جـ – حل نفس الجملة السّابقة في المجموعة $\dfrac{\text{ص}}{19\text{ص}} \times \dfrac{\text{ص}}{19\text{ص}}$

7 - أجوبة التصحيح الذاتي :

7 – 1 – حل المعادلة في المجموعة $\frac{\text{ص}}{7\text{ص}}$.

العدد 7 أولي، $\left(\frac{\text{ص}}{7\text{ص}} ، \dot{+} ، \dot{\times}\right)$ حقل وبالتالي لكل عنصر من المجموعة $\frac{\text{ص}}{7\text{ص}}$ نظيراً بالنسبة للعملية $\dot{\times}$. نظير العنصر $\dot{2}$ بالنسبة للعملية $\dot{\times}$ هو العنصر $\dot{4}$ و نظير $\dot{6}$ بالنسبة للعملية $(\dot{+})$ هو العنصر $\dot{1}$.

إذن : $\dot{2}\text{س} \dot{+} \dot{6} = \dot{3} \Leftrightarrow \dot{2}\text{س} \dot{+} \dot{6} \dot{+} \dot{1} = \dot{3} \dot{+} \dot{1}$

$$\Leftrightarrow \dot{2}\text{س} \dot{+} \dot{0} = \dot{4}$$

$$\Leftrightarrow \dot{2}\text{س} = \dot{4}$$

$$\Leftrightarrow \dot{4} \dot{\times} \dot{2}\text{س} = \dot{4} \dot{\times} \dot{4}$$

$$\Leftrightarrow \dot{1}\text{س} = \dot{2}$$

ومنه س $= \dot{2}$ هو الحل الوحيد للمعادلة (1) في المجموعة $\frac{\text{ص}}{7\text{ص}}$.

* حل المعادلة (1) في المجموعة $\frac{\text{ص}}{8\text{ص}}$:

العدد 8 ليس عددًا أوليا وعليه فالمجموعة$\left(\frac{\text{ص}}{8\text{ص}} ، \dot{+} ، \dot{\times}\right)$ حلقة غير تامة، وفيها مجموعة قواسم الصفر هي :$\{\dot{2} ، \dot{4} ، \dot{6}\}$ لدينا نظير $\dot{6}$ هو $\dot{2}$ بالنسبة للعملية$(\dot{+})$

فالمعادلة : $\dot{2}\text{س} \dot{+} \dot{6} = \dot{3} \Leftrightarrow \dot{2}\text{س} \dot{+} \dot{6} = \dot{3} \dot{+} \dot{2}$

$$\Leftrightarrow \dot{2}\text{س} \dot{+} \dot{0} = \dot{5}$$

$$\Leftrightarrow \dot{2}\text{س} = \dot{5}$$

وحسب الجدول التالي :

س	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$	$\dot{7}$
$\dot{2}$س	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{4}$	$\dot{6}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{4}$	$\dot{6}$

نلاحظ أنه لا يوجد أي عنصر $\dot{\text{س}}$ من المجموعة $\frac{\text{ص}}{8\text{ص}}$بحيث يكون $\dot{2}$س $= \dot{5}$.

فالمعادلة (1) لا تقبل حلولاً في المجموعة $\frac{ص}{8ص}$.

7 – 2 * حل المعادلة $س^2 \dot{+} س - \dot{2} = \dot{0}$ في المجموعة $\frac{ص}{13ص}$:

العدد 13 أولي ⇐ $\left(\frac{ص}{13ص}, \dot{+}, \dot{\times}\right)$ حقل فالمجموعة $\frac{ص}{13ص}$

لا تحتوي على قواسم للصفر. ولكل عنصر نظير بالنسبة للعملية $\dot{\times}$.

نكتب الطرف الأول للمعادلة : $س^2 \dot{+} س - \dot{2} = \dot{0}$ على الشكل التالي :

$$س^2 \dot{+} س - \dot{2} = \dot{0} \Leftrightarrow \left[س \dot{+} (\dot{2})'\right]^2 - \dot{2} - \left[(\dot{2})'\right]^2 = \dot{0}$$

حيث $(\dot{2})'$ هو نظير $\dot{2}$ بالنسبة للعملية $\dot{\times}$ في المجموعة $\frac{ص}{13ص}$.

$\dot{2} \dot{\times} \dot{7} = \dot{1}$ ومنه $(\dot{2})' = \dot{7}$

نحصل على ما يلي : $س^2 \dot{+} س - \dot{2} = \dot{0} \Leftrightarrow (س \dot{+} \dot{7})^2 - \dot{2} - (\dot{7})^2 = \dot{0}$

$$\Leftrightarrow (س \dot{+} \dot{7})^2 - \dot{2} - \dot{10} = \dot{0}$$

$$\Leftrightarrow (س \dot{+} \dot{7})^2 - \dot{12} = \dot{0}$$

$$\Leftrightarrow (س \dot{+} \dot{7})^2 = \dot{12}$$

نضع **س**= $س \dot{+} \dot{7}$ ثم نحل المعادلة **س**$^2 = \dot{12}$ في المجموعة $\frac{ص}{13ص}$.

س	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$	$\dot{7}$	$\dot{8}$	$\dot{9}$	$\dot{10}$	$\dot{11}$	$\dot{12}$
س	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$	$\dot{9}$	$\dot{3}$	$\dot{12}$	$\dot{10}$	$\dot{10}$	$\dot{9}$	$\dot{3}$	$\dot{9}$	$\dot{4}$	$\dot{1}$

حسب الجدول نجد **س**$^2 = \dot{12} \Leftrightarrow$ س $= \dot{5}$ و بالتالي

$(س \dot{+} \dot{7})^2 - \dot{12} = \dot{0} \Leftrightarrow (س \dot{+} \dot{7})^2 - (\dot{5})^2 = \dot{0}$ (لأن $(\dot{5})^2 = \dot{12}$)

$$\Leftrightarrow (س \dot{+} \dot{7} - \dot{5})(س \dot{+} \dot{7} \dot{+} \dot{5}) = \dot{0}$$

$$\Leftrightarrow (س \dot{+} \dot{2})(س \dot{+} \dot{12}) = \dot{0}$$

و منه : $\left\{\begin{array}{l} س\dot{+}\dot{2}=\dot{0} \\ \text{أو} \\ س \dot{+} \dot{12}=\dot{0} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} س=\dot{11} \\ \text{أو} \\ س=\dot{1} \end{array}\right.$ (لأن $\frac{ص}{13ص}$ حقل)

لإذن مجموعة حلول المعادلة : $س^2\dot{+}س-\dot{2}=\dot{0}$ في الحقل $\frac{ص}{13ص}$ هي $\{\dot{1}، \dot{11}\}$.

* الحل في المجموعة $\frac{ص}{10ص}$:

العدد 10 ليس أوليًا، إذن $(\frac{ص}{10ص}،\dot{+}،\dot{\times})$ حلقة غير تامة ومنه نظير العنصر $\dot{2}$ غير موجود في المجموعة $\frac{ص}{10ص}$ بالنسبة للعملية $\dot{\times}$ لأن 2 و 10 ليسا أوليا فيما بينهما .

نلاحظ هنا أن $\dot{1}$ هو حل ظاهر للمعادلة ومنه كثير الحدود $س^2\dot{+}س-\dot{2}$ يتحلّل ولدينا :

$$س^2\dot{+}س-\dot{2}=(س-\dot{1})(س\dot{+}\dot{2})$$

إذن : $س^2\dot{+}س-\dot{2}=\dot{0} \Leftrightarrow (س-\dot{1}=\dot{0}$ أو $س\dot{+}\dot{2}=\dot{0})$ أي $س=\dot{1}$ أو $س=\dot{8}$

نستنتج أن $\dot{1}$ و $\dot{8}$ هما حلين لهذه المعادلة و لكن ليس هما الحلين الوحيدين لأن المجموعة $\frac{ص}{10ص}$ حلقة غير تامة .

لدينا : $\dot{أ}$ قاسم للصفر $\Leftrightarrow$ أ وَ 10 أوليان فيما بينهما.

قواسم الصفر هي عناصر المجموعة : $\{\dot{2}، \dot{5}، \dot{4}، \dot{6}، \dot{8}\}$

بما أن : $س^2\dot{+}س-\dot{2}=\dot{0} \Leftrightarrow (س-\dot{1})(س\dot{+}\dot{2})=\dot{0}$.

نلاحظ أن أزواج القواسم الملائمة هي : $(\dot{2}، \dot{5})$، $(\dot{5}، \dot{4})$، $(\dot{5}، \dot{6})$، $(\dot{5}، \dot{8})$

أي $\dot{2}\dot{\times}\dot{5}=\dot{0}$ و $\dot{5}\dot{\times}\dot{4}=\dot{0}$ و $\dot{5}\dot{\times}\dot{6}=\dot{0}$ و $\dot{5}\dot{\times}\dot{8}=\dot{0}$

لدينا : $(س-\dot{1})(س\dot{+}\dot{2})=(س\dot{-}1)(س\dot{+}2)=\dot{0}$ . . . . (1)

لا حظ أن : س − 1 < س + 2 وَ (س + 2) − (س − 1) = 3 .

إذن كل زوج يحقق العلاقة (1) يجب أن يكون الفرق بين مركبتيه يساوي 3.

ومنه الأزواج التي تحقق العلاقة (1) هي : $\left(\dot{5} ، \dot{2}\right)$ لأن : 5 − 2 = 3 و $\left(\dot{8} ، \dot{5}\right)$ لأن 8 − 5 = 3.

وفي الأخير نجد :

$$\left(\text{س}-\dot{1}\right)\left(\text{س}\dotplus\dot{2}\right)=\dot{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{س}-\dot{1}=\dot{0} \text{ أو } \text{س}\dotplus\dot{2}=\dot{0} \\ \text{أو} \\ \text{س}-\dot{1}=\dot{2} \text{ وَ } \text{س}\dotplus\dot{2}=\dot{5} \\ \text{أو} \\ \text{س}-\dot{1}=\dot{5} \text{ وَ } \text{س}\dotplus\dot{2}=\dot{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{س}=\dot{1} \text{ أو } \text{س}=\dot{8} \\ \text{أو} \\ \text{س}=\dot{3} \text{ وَ } \text{س}=\dot{3} \\ \text{أو} \\ \text{س}=\dot{6} \text{ وَ } \text{س}=\dot{6} \end{cases}$$

إذن حلول المعادلة هي : $\left\{\dot{8} ، \dot{6} ، \dot{3} ، \dot{1}\right\}$

7 – 3 . أ – حل المعادلة : $\dot{2}\text{س}=\dot{0}$ في المجموعة $\frac{\text{ص}}{6\text{ص}}$:

لدينا المجموعة $\frac{\text{ص}}{6\text{ص}}=\left\{\dot{5} ، \dot{4} ، \dot{3} ، \dot{2} ، \dot{1} ، \dot{0}\right\}$

من الجدول التالي :

س	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$
2 س	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$	$\dot{4}$

نستنتج أن : $\dot{2}\text{س}=\dot{0} \Leftrightarrow \text{س}=\dot{0}$ و $\text{س}=\dot{3}$

إذن مجموعة الحلول هي : $\left\{\dot{3} ، \dot{0}\right\}$

ب – حل جملة المعادلتين (I) في المجموعة $\frac{\text{ص}}{6\text{ص}}\times\frac{\text{ص}}{6\text{ص}}$:

$$(\text{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{2}\text{س}-\dot{4}\text{ع}=\dot{2} \\ \text{وَ} \\ \dot{1}\text{س}\dotplus\dot{5}\text{ع}=\dot{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{2}\text{س}-\dot{4}\text{ع}-\dot{2}=\dot{0} \\ \text{وَ} \\ \dot{1}\text{س}\dotplus\dot{5}\text{ع}=\dot{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{2}\left(\text{س}-\dot{2}\text{ع}-\dot{1}\right)=\dot{0} \\ \text{وَ} \\ \dot{1}\text{س}\dotplus\dot{5}\text{ع}=\dot{2} \end{cases}$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{1}\text{س} - \dot{2}\text{ع} - \dot{1} = \dot{0} \\ \text{وَ} \\ \dot{1}\text{س} \dot{+} \dot{5}\text{ع} = \dot{2} \end{cases} (1) \text{ أو } \begin{cases} \dot{1}\text{س} - \dot{2}\text{ع} - \dot{1} = \dot{3} \\ \text{وَ} \\ \dot{1}\text{س} \dot{+} \dot{5}\text{ع} = \dot{2} \end{cases} (2)$$

* حل الجملة (1) :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{1}\text{س} - \dot{2}\text{ع} - \dot{1} = \dot{0} \\ \text{وَ} \\ \dot{1}\text{س} \dot{+} \dot{5}\text{ع} = \dot{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{س} = \dot{2}\text{ع} \dot{+} \dot{1} \\ \text{وَ} \\ \dot{1}\text{س} \dot{+} \dot{5}\text{ع} = \dot{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{س} = \dot{2}\text{ع} \dot{+} \dot{1} \\ \text{وَ} \\ \dot{2}\text{ع} \dot{+} \dot{1} \dot{+} \dot{5}\text{ع} = \dot{2} \end{cases}$$

(بتعويض س بقيمتها)

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{س} = \dot{2}\text{ع} \dot{+} \dot{1} \\ \text{وَ} \\ \dot{7}\text{ع} \dot{+} \dot{1} = \dot{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{س} = \dot{2}\text{ع} \dot{+} \dot{1} \\ \text{وَ} \\ \dot{7}\text{ع} = \dot{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{س} = \dot{2}\text{ع} \dot{+} \dot{1} \\ \text{وَ} \\ \text{ع} = \dot{1} \ \left(\text{لأن } \dot{7} = \dot{1}\right) \end{cases}$$

ومنه $\text{س} = \dot{2} \dot{\times} \dot{1} \dot{+} \dot{1}$

أي $\text{س} = \dot{3}$

إذن : $\left(\dot{3} \text{ ، } \dot{1}\right)$ هو حل للجملة (I) في المجموعة $\frac{\text{ص}}{6\text{ص}} \times \frac{\text{ص}}{6\text{ص}}$

* حل الجملة (2)

$$\begin{cases} \dot{1}\text{س} - \dot{2}\text{ع} - \dot{1} = \dot{3} \\ \text{وَ} \\ \dot{1}\text{س} \dot{+} \dot{5}\text{ع} = \dot{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{س} = \dot{2}\text{ع} \dot{+} \dot{4} \\ \text{وَ} \\ \text{س} \dot{+} \dot{5}\text{ع} = \dot{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{س} = \dot{2}\text{ع} \dot{+} \dot{4} \\ \text{وَ} \\ \dot{2}\text{ع} \dot{+} \dot{4} \dot{+} \dot{5}\text{ع} = \dot{2} \end{cases}$$

(بتعويض س بقيمتها)

(2) $\Leftrightarrow$
س = $\dot{2}$ع $\dot{+}$ $\dot{4}$
وَ
$\dot{7}$ع = $\dot{4}$ أي ع = $\dot{4}$ (لأن $\dot{7} = \dot{1}$)

إذن س = $\dot{2}$ $\dot{\times}$ $\dot{4}$ $\dot{+}$ $\dot{4}$ أي س = $\dot{0}$

إذن ($\dot{0}$ ، $\dot{4}$) هو حل ثاني للجملة **(I)** في المجموعة ص/6ص × ص/6ص .

نستنتج أن حلول الجملة (I) في المجموعة ص/6ص × ص/6ص هي $\left\{ \left(\dot{4},\dot{0}\right), \left(\dot{1},\dot{3}\right) \right\}$

جـ – حل جملة المعادلتين (I) في المجموعة ص/19ص × ص/19ص :

العدد 19 أولي، المجموعة ص/19ص حقل وبالتالي العنصر $\dot{2}$ هو عنصرًا إعتياديًا بالنسبة للعملية ($\dot{\times}$) نستنتج ما يلي :

$\dot{2}$س − $\dot{4}$ع = $\dot{2}$
وَ
$\dot{1}$س $\dot{+}$ $\dot{5}$ع = $\dot{2}$

$\Leftrightarrow$

$\dot{2}$($\dot{1}$س − $\dot{2}$ع) = $\dot{2}$ $\dot{\times}$ $\dot{1}$
وَ
$\dot{1}$س $\dot{+}$ $\dot{5}$ع = $\dot{2}$

$\Leftrightarrow$
$\dot{1}$س − $\dot{2}$ع = $\dot{1}$
وَ
$\dot{1}$س $\dot{+}$ $\dot{5}$ع = $\dot{2}$

(لأن العنصر $\dot{2}$ اعتياديا بالنسبة للعملية $\dot{\times}$)

$\Leftrightarrow$
س = $\dot{2}$ع = $\dot{1}$
وَ
$\dot{1}$س $\dot{+}$ $\dot{5}$ع = $\dot{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{س} = \dot{2}\,\text{ع} \dotplus \dot{1} \\ \text{و} \\ \dot{2}\,\text{ع} \dotplus \dot{1} \dotplus \dot{5}\,\text{ع} = \dot{2} \end{cases}$$ (بتعويض س بقيمتها)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{س} = \dot{2}\,\text{ع} \dotplus \dot{1} \\ \text{و} \\ \dot{7}\,\text{ع} = \dot{1} \end{cases}$$

نظير العنصر $\dot{7}$ بالنسبة للعملية $\dot{\times}$ في المجموعة $\frac{\text{ص}}{19\text{ص}}$ هو $\dot{11}$ ، لأن : $\dot{7}\dot{\times}\dot{11} = \dot{1}$ منه $\dot{11}\dot{\times}\dot{7}\text{ع} = \dot{11}\dot{\times}\dot{1} \Leftrightarrow \dot{7}\text{ع} = \dot{1}$ أي ع $= \dot{11}$ ومنه : س $= \dot{2}\dot{\times}\dot{11}\dotplus\dot{1}$ أي س $= \dot{4}$. إذن الزوج $(\dot{4}،\dot{11})$
هو الحل الوحيد للجملة (I) في المجموعة $\frac{\text{ص}}{19\text{ص}} \times \frac{\text{ص}}{19\text{ص}}$.

فهرس السلسلة الرابعة

فـهـرس الـسـلـسـلـة الـرابـعـة

تـتـضـمـن هـذه الـسـلـسـلـة درسًـا واحـدًا :

* مـجـمـوعـة الأعـداد الـمـركـبـة (م) .

الـهـدف (الأهـداف) من الـدرس :* حـل مـشـكـلـة جـذر الـعـدد الـسـالـب.

* دراسـة الـتـحـويـلات الـنـقـطـيـة في الـمـسـتـوي الـمـركـب

المدة اللازمة لدراسة : 25 ساعـة لـلـقـسـم الـريـاضـي. 20 ساعـة لـلـقـسم العلمي .

الـدروس الـتي يـنـبـغـي مـراجـعـتـهـا :

1 – الـزوايـا الـمـوجّـهـة في الـمـسـتـوي. 2 –حـساب الـمـثـلـثـات.

المراجع الخاصة بهذا الدرس :كتاب الرياضيات 3 ث/ع +ر المعهد التربوي الوطني

تصميم الدرس

تمهيد.

1 – المجموعة م.

2 – تعريف العلميتين الداخليتين في م.

3 – المجموعة ح محتواة في المجموعة م.

4 – إيجاد عدد مربعه -1 في م.

5 – شكل جديد لعناصر المجموعة م.

6 – التمثيل الهندسي للعدد المركب.

7 – الشكل المثلثي للعدد المركب.

8 – متطابقات مثلثية .

9 – العبارة الخطية لِ : تجب $^{ن}\theta$ ، جب $^{ن}\theta$.

10 – العدد المركب المرافق.

11 – الجذور النونية لعدد مركب.

12 – ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية في م.

13 – تمارين التصحيح الذاتي.

14 – أجوبة التصحيح الذاتي.

تمهيد :

إن المسألة الهامة في الجبر هي مسألة التوسيع الجبري ، المقصود بها إضافة عناصر لمجموعة ما نحصل إثرها على مجموعة جديدة يكون فيها حل لبعض المشاكل المطروحة سابقا.

فمثلاً : عدم وجود حل للمعادلة : س + 3 = 0 في المجموعة ط دعانا لتعريف المجموعة ص وكذلك عدم وجود حل للمعادلة : س $^2 = 2$ في ك دعانا لتعريف المجموعة ح وهكذا . . . .

لاحظ أن المعادلة : س $^2 = -1$ ليس لها حل في المجموعة ح وهذا ما يدعونا إلى عملية التوسيع، ولكن المهمّ ما هي الشروط الإضافية التي نحصل عليها من خلال تعريفنا لهذه المجموعة الجديدة، فالتوسيع يجب أن يحافظ على خواص المجموعة ح كاملة ويحل مشاكلها . وعليه فهدفنا في هذا البحث هو تعريف مجموعة جديدة نرمز لها :م وتحقّق ما يلي :

* تقبل عمليتين داخليتين هما إمتداد لعمليتي الجمع والضرب في ح .

* ح ⊂ م

تبقى م حقلا بالنسبة لعمليتيها الداخليتين .

* يكون فيها حل لمشكلة جذر العدد السّالب.

* من المعلوم أنه يوجد تقابل بين المجموعة ح ومجموعة نقط المحور $\overleftarrow{\text{سَ س}}$

فلنحاول إيجاد تقابل بين المجموعةم ومجموعة نقط المستوي س م ع .

1 - المجموعة م :

لنعتبر المجموعة ح×ح مجموعة الأزواج المرتبة التي ينتمي كل من مسقطيها الأول والثاني إلى المجموعة ح أي : م = { (أ ، ب) / أ ∋ ح وَ ب ∋ ح }

2 - تعريف العمليتين الداخليتين في م :

لنعرّف علىم العمليتين ⊕ ،⊗ كما يلي :

∀ (أ ، ب) ∋ م ، ∀ (حـ ، د) ∋ م :

(أ ، ب) $\oplus$ (حـ ، د) = (أ + جـ ، ب + د)

(أ، ب) $\otimes$ (حـ ، د) = (أ جـ − ب د ، أ د + ب جـ).

2 – 1 – دراسـة العمـلـيـة $\oplus$: نـلاحـظ أن الـعـمـلـيـة $\oplus$ مـعـرفـة انـطـلاقـا مـن الـعـمـلـيـة + لذلـك فـإن خـواص العمـلـيـة + تنـتـقل إلـى الـعـمـلـيـة$\oplus$ أي أن : الـعـمـلـيـة $\oplus$ تبـديـلـيـة، تـجـمـيـعية، تقبل عنصرًا حياديًا هو (0 ، 0).

ولـكل عنـصـر (أ ، ب) من م نظير بـالـنـسـبـة لـهذه العملية هو (−أ ، − ب) ممّا يُـبـيّن أن : (م ،$\oplus$) زمرة تـبـديـلـيـة.

2 – 2 – دراسـة العمـلـيـة $\otimes$:

بمـنـاقـشـة ممـاثـلـة نـجـد أن الـعـمـلـيـة$\otimes$ تبـديـلـيـة وتـجـمـيـعـيـة ويـمـكـنـك الـتـأكـد مـن ذلك بـسـهـولـة.

*** الـعـنـصـر الـحـيـادي :**

نـفـرض أن الـعـنـصـر الـحـيـادي هو (هـ ، و) فـيكـون :

$\forall$ (أ ، ب) $\in$ م : (أ ، ب) $\otimes$ (هـ ، و) = (هـ ، و) $\otimes$= (أ ، ب) = (أ ، ب) .

ولـمـا كـانـت الـعـمـلـيـة$\otimes$ تبـديـلـيـة نـكـتـفـي بـحـل مـعـادلـة واحـدة ولـتـكـن :

(أ ، ب)$\otimes$ (هـ ، و) = (أ ، ب) وذلك لـلـبـحـث عن الـعـنـصـر الحيادي .

(أ، ب) $\otimes$ (هـ ، و) = (أ ، ب) $\Leftrightarrow$(أ هـ – ب و، أ و + ب هـ) =(أ ، ب)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{أ هـ} - \text{ب و} = \text{أ} \ldots\ldots(1) \\ \text{وَ} \\ \text{أ و} + \text{ب هـ} = \text{ب} \ (1) \end{cases}$$

بـضـرب الـمـعـادلـة (1) فـي أ والـمـعـادلـة (2) فـي ب (بـفـرض أ ≠ 0 ، ب≠ 0) وَ بـالـجـمـع يـنـتـج :

$\left(\text{أ}^2+\text{ب}^2\right)$ هـ = $\text{أ}^2+\text{ب}^2$ $\Leftarrow$ هـ = 1

وبـالـتـعـويـض فـي الـمـعـادلـة (1) نـجـد أن :

أ – ب و = أ $\Leftarrow$ ب و = 0 $\Leftarrow$ و = 0 .

أي أن : (هـ ، و) = (1 ، 0) .

وفـي حـالـة : أ = 0 وَ ب = 0 وبـالـتـعـويض فـي الـجـمـلـة الـسّـابـقـة نـجـد أنـهـا مـحـقـقـة وكـذلك عـندما :أ = 0 و ب ≠ 0 أو أ ≠ 0 و ب = 0.

فـالـعـنـصـر الحيـادي بـالـنـسـبـة لـلعملية $\otimes$ هـو الـزوج : (1 ، 0)

* **العنصر النظير :**

∀ (أ ، ب) ∋ م −{(0 ، 0)}، ليكن (أَ ، بَ) نظيره بالنسبة للعملية⊗ عندئذ يكون :

(أ ، ب) ⊗ (أَ ، بَ) = (أَ ، بَ) ⊗ (أ ، ب) = (1 ، 0)

ولأن العملية⊗ تبديلية نكتفي بحل معادلة واحدة :

(أ ، ب) ⊗ (أَ ، بَ) = (1 ، 0) ⇔ (أ أَ − ب بَ ، أ بَ + ب أَ) = (1 ، 0)

$$(أ ، ب) \otimes (أَ ، بَ) = (1 ، 0) \Leftrightarrow \begin{cases} أ\,أَ - ب\,بَ = 1 \;.....(1) \\ و \\ أ\,بَ + ب\,أَ = 0 \;....(2) \end{cases}$$

بضرب المعادلة (1) فيأ والمعادلة (2) في ب والجمع ينتج :

$$\left(أ^2+ب^2\right)أَ = أ \Leftarrow أَ = \frac{أ}{أ^2+ب^2} \,.$$

بالتعويض في المعادلة (2) نجد أن $بَ = \frac{-ب}{أ^2+ب^2}$

إذن نظير (أ ، ب) بالنسبة للعملية ⊗ هو الزوج :

$$\left(\frac{أ}{أ^2+ب^2} \;،\; \frac{-ب}{أ^2+ب^2}\right) \,.$$

ملاحظة : في حالة أ = 0 أو ب = 0 وبالتعويض في الجملة نجد أنها محققة .

2 – 3 − العملية⊗ توزيعية بالنسبة للعملية ⊕ :

∀ (أ ، ب) ∋ م : ∀ (حـ ، ب)∋ م ، ∀ (س ، ع) ∋ م :

(أ ،ب) ⊗ [(حـ ،د) ⊕ (س،ع)] =[(أ ، ب)⊗ (حـ ،د)] ⊕ [(أ ،ب)⊗ (س ، ع)] .

[(أ ،ب) ⊕ (حـ ،د)]⊗ (س،ع)]=[(أ ،ب)⊗ (س ،ع) ⊕ [(حـ ،د)⊗ (س،ع)]

يمكنك تحقيق ذلك :

نستنتج ممّا سبق أن : (م ،⊗ ، ⊕) حقل تبديلي.

3 − ح̄ ⊂ م : لنعتبر المجموعة ح̄ الجزئية منم والمعرفة كما يلي :

ح̄ = { (أ ، 0) / أ ∋ ح } ولنعرّف التطبيق

تا : ح ← ح̄ .

أ ↤ تـا (أ) = (أ ، 0) .

إن الـتـطـبـيـق تـا تـقـابـل ولـنـبـرهـن أنـه تـشـاكـلا أي :

∀ أ ∊ ح : ∀ ب ∊ ح : تـا (أ + ب) = تـا (أ) ⊕ تـا (ب) .

تـا (أ × ب) = تـا (أ) ⊗ تـا (ب)

* تـا (أ + ب) = (أ + ب ، 0) = (أ،0) ⊕ (ب ، 0) = تـا (أ) ⊕ تـا (ب) .

* تـا (أ × ب) = (أ × ب ، 0) = (أ ، 0) ⊗ (ب ، 0) = تـا (أ)⊗ تـا (ب).

إذن الـتـطـبـيـق تـا تـشـاكـل تـقـابـلـي من (ح ، + ، ×) فـي ($\overline{ح}$، ⊕ و ⊗) فـيـمـكـن الـمـطـابـقـة بـيـن كـل عـنـصـر وصـورتـه أي : أ ≡ (أ ، 0) .

وهـكـذا تـكـون ح = $\overline{ح}$. و لـكـن $\overline{ح}$ ⊂ م (فـرضـاً)

إذن : ح ⊂ م

كـمـا نـطـابـق بـيـن عـمـلـيـتـي ح وعـمـلـيـتـي $\overline{ح}$ وهـذا يـعـنـي أن عـمـلـيـتـي م هـمـا إمـتـداد لـعـمـلـيـتـي ح .

كـذلـك سـنـكـتـب مـن الآن فـصـاعـدًا + بـدل⊕ و × بـدل ⊗.

مـلاحـظـة :

مـن خـلال مـطـابـقـة الـعـدد وصـورتـه يـمـكـن أن نـكـتـب :

(0 ، 0) = 0 ، (1 ، 0) = 1 ، (− 1 ، 0) = − 1 وهـكـذا . . . .

أي أن الـعـنـصـر الـحـيـادي فـي ح هـو نـفـس الـعـنـصـر الـحـيـادي فـي م مـمّـا يـؤكـد صـحّـة الـتـوسـيـع الـجـبـري.

4 - إيـجـاد عـدد فـي م مـربـعـه - 1 :

نـفـرض و جـود عـدد مـربـعـه− 1 ولـيـكـن (أ ، ب) مـن م.

عـنـدئـذ يـكـون : (أ ، ب) ⊗ (أ ، ب) = − 1 و لـكـن : − 1 = (−1 ، 0)

أي : $\left(أ^2 - ب^2 \text{ ، } 2أب\right) = (-1 \text{ ، } 0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} أ^2 - ب^2 = -1 \ldots\ldots (1) \\ \text{وَ} \\ 2أب = 0 \ldots\ldots\ldots (2) \end{array} \right.$

من الـمـعـادلـة (2) يـتـضـح أنـه إمـا أ = 0 أو ب = 0.

* إذ كـان ب = 0 بـالـتـعـويـض فـي الـمـعـادلـة (1) نـجـد : $أ^2 = -1$ وهـي مـعـادلـة مـسـتـحـيـلـة لأن أ عـنـصـر مـن ح.

* إذا كـان أ = 0 بالـتـعـويـض في الـمـعـادلـة (1) نجد أن : $-ب^2 = -1$

وهـذا يـعـنـي : ب = + 1 أو ب = − 1

فـالـزوج (أ ، ب) الـمـفـروض هـو (0 ، 1) أو (0 ، −1)

ونـرمـز لـلأول بـالـرمـز : ت ولـلـثـانـي بـالـرمـز : − ت

أي : $ت^2 = -1$ ، $(-ت)^2 = -1$

تـمـريـن :

أحـسـب الـقـوى الـمـخـتـلـفـة لـلـعـدد ت، مـن أجـل ن مـن ط

الـحـل :

ن = 0 ، $ت^0 = 1$

ن = 1 ، ت = ت

ن = 2 ، $ت^2 = -1$

ن = 3 ، $ت^3 = -ت$

ن = 4 ، $ت^4 = 1$

ن = 5 ، $ت^5 = ت$

وهـكـذا نـلاحـظ أن الـنـواتـج تـتـكـرّر بـشـكـل دوري حـيـث الـدور يـسـاوي 4.

إذن : $ت^{4ن} = \left(ت^4\right)^{ن} = (1)^{ن} = 1$

$ت^{4ن+1} = ت^{4ن} \times ت = ت$

$ت^{4ن+2} = ت^{4ن} \times ت^2 = -1$

$ت^{4ن+3} = ت^{4ن} \times ت^3 = -ت$

5 ـ شـكـل جـديـد لـعـنـاصـر الـمـجـمـوعـة م :

لاحظ أن : (0 ، 1) × (ب ، 0) = (0 − 0 ، ب + 0) = (0 ، ب)

كـمـا أن : (أ ، 0) = أ (حـسـب الـتـشـاكـل مـن ح فـي ح̄)

إذن : ∀ (أ ، ب) ∈ م فـإنـه يـمـكـن أن نـكـتـب :

(أ ، ب) = (أ ، 0) ⊕ (0 ، ب)

$= (\text{أ} ، 0) \oplus (0 ، 1) \otimes (\text{ب} ، 0)$

= أ + ت ب

أي أن كل عدد مركب يمكن اعتباره مجموع عددين أحدهما حقيقي والآخر حقيقي مضروب في ت . تدعى هذه الكتابة : الشكل الجبري للعدد المركب. يسمى أ الجزء الحقيقي للعدد المركب ونرمز له ح (أ + ت ب) .

و يسمى ب الجزء التخيلي للعدد المركب ونرمز له : ت (أ + ت ب).

فإذا كان أ = 0 فالعدد المركب يكتب : ت ب ونقول أنه تحليليا صرفا إذا كان ب = 0 فالعدد المركب يكتب : أ ونقول أنه حقيقيا .

ملاحظة : إن المجموعة م المزودة بالعمليتين + ، × لها بنية حقل تبدلي لذا نستطيع استخدام كل خواص الحقل من جمع وضرب وتقسيم وتوزيع .

كذلك نستعمل ت كأي عنصر من م. فمثلا في عمليتي الجمع و الضرب لا نعود إلى التعريف الأول لهما وإنما نجمع الجزء الحقيقي مع الحقيقي والجزء التحليلي مع التحليلي وفي الضرب نستعمل خاصية التوزيع وهكذا.

* **أمثلة** :

1 – (4 + 5 ت) + (2 + ت) = (4 + 2) + (5 ت + ت)

= 6 + 6 ت .

2 – (3 + 2 ت) (1 – ت) = 3 (1 – ت) + 2 ت (1 – ت) .

= 3 – 3 ت + 2 ت - 2 . ت^2

= 5 – ت

3 – (1+ت)^3 = 1 + 3ت + 3 ت^2 + ت^3

= 1 + 3 ت – 3 – ت

= – 2 + 2 ت

سنتعرف فيما بعد كيفية تقسيم عددين مركبين وكذلك إيجاد مقلوب عدد مركب.

6 - التمثيل الهندسي للعدد المركب

رأينا أن كل عدد مركب ص يكتب على الشكل : ص =أ + ت ب، فهو يتعيّن بزوج من الأعداد الحقيقية (أ ، ب) . لذلك يمكن إنشاء تطبيق تا منم في مجموعة الأشعة في المستوي كما يلي : تا :م ← **ش** : ص = أ + ت ب← تا (ص) = $\overrightarrow{\text{ش}}\binom{\text{أ}}{\text{ب}}$

يسمى الشعاع $\overrightarrow{\text{ش}}$ الصورة الشعاعية للعدد المركب ص كما نقول أن ص هو لاحقة الشعاع $\overrightarrow{\text{ش}}$. ويَمكن إثبات أن التطبيق تا هو تشاكل تقابلي.

*** حالة خاصة :**

إذا اعتبرنا $\overrightarrow{\text{ش}}$ شعاعًا بدايته النقطة م (مبدأ المعلم) فإن إحداثيا نهايته ن هما مركبتي الشعاع $\overrightarrow{\text{ش}}$.

لذا يمكن أن نرفق النقطة ن بالعدد ص أي نعرف التقابل : ها : م$_1$ ← (π).

ص = أ + ت ب ↤ تا (ص) = ن (أ ، ب)

تسمى النقطة ن الصورة النقطية للعدد المركب ص.

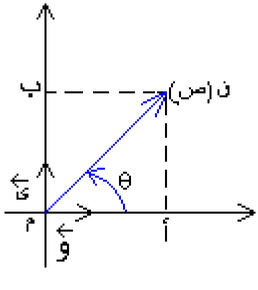
نتيجة :

يتساوى عددان مركبان إذا وفقط إذا انطبقت صورتاهما النقطيتان أي إذا كان :

ص$_1$ = أ$_1$ + ت ب$_1$ ، ص$_2$ + ت ب$_2$ فإن :

$$\boxed{\text{ص}_1 = \text{ص}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{أ}_1 = \text{أ}_2 \\ \text{و} \\ \text{ب}_1 = \text{ب}_2 \end{cases}}$$

7 - الشكل المثلثي للعدد المركب :



ليكن العدد المركب ص =أ + ت ب صورته النقطية ن (أ ، ب) وصورته الشعاعية الشعاع $\overrightarrow{\text{م ن}}\binom{\text{أ}}{\text{ب}}$ الذي طوله $\|\overrightarrow{\text{م ن}}\| = \sqrt{\text{أ}^2+\text{ب}^2}$

يسمى العدد الحقيقي الموجب $\sqrt{\text{أ}^2+\text{ب}^2}$ طويلة العدد المركب ص.ونكتب : $|\text{ص}| = \sqrt{\text{أ}^2+\text{ب}^2}$

أمــا قــيس $\left(\overleftarrow{و}\text{ ، }\overleftarrow{م\,ن}\right)$ فيســمى عمدة للعدد المركب ص ونرمز لها : عـ (ص). (أنظر الشكل السّابق)

7 – 1 ملاحظات :

* إذا كـان ص = 0 فإن $|ص|=0$ وعمدته غير معينة.
* إذا كان ص حقيقيا فإن : $|ص|$ القيمته المطلقة.

عـ $(ص)=0$ إذا كانت صورته النقطة ن تنتمي إلى $[م\ س)$

عـ (ص) = π إذا كانت صورته النقطية ن تنتمي إلى $[م\ سَ)$.

* إذا كان ص تخيليًا صرفا فإن صورته النقطة ن تنتمي إلى(عَ ع) وبالتالي تكون عـ (ص) = $\frac{\pi}{2}$ أو عـ (ص) = $-\frac{\pi}{2}$

* إذا كانت θ عمدة للعدد المركب ص فإن كل عدد من الشكل : $\acute{\theta} = \theta + 2ك\pi$ (حيث ك∋ ص) هو كذلك عمدة للعدد المركب ص.

7 – 2 الصيغة الجديدة :

نلاحظ من الشكل السابق أن : تجب $\theta = \frac{أ}{|ص|}$ ، جب $\theta = \frac{ب}{|ص|}$

أي أن : أ = $|ص|$ تجب θ وَ ب = $|ص|$ جب θ

فيكون : ص = أ + ت ب = $|ص|$ تجب θ + ت جب θ .

= $|ص|$ (تجب θ + ت جب θ)

تسمى هذه الكتابة الشكل المثلثي للعدد المركب ص ونكتبها إختصارًا : ص [ر،θ] (حيث ر= $|ص|$).

ملاحظة :

إذا كان : $ص_1 = [ر_1 ، \theta_1]$ ، $ص_2 = [ر_2 ، \theta_2]$ فإن :

$$ص_1 = ص_2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} ر_1 = ر_2 \\ وَ \\ \theta_1 = \theta_2 + 2ك\pi \ / \ ك ∋ ص. \end{array}\right.$$

7 – 3 – أمثلة : أكتب الأعداد المركبة الآتية بشكلها المثلثي :

ص = ت ، ص = 1 ، ص = − 3 ت ، ص = − 5 ، ص = 1 + ت $\sqrt{3}$

الحل :

* ص = ت

|ص| = 1 ، عـ (ص) = $\frac{\pi}{2}$.

إذن : ص = 1 (تجب $\frac{\pi}{2}$ + ت جب $\frac{\pi}{2}$) أو ص = $\left[1 ، \frac{\pi}{2}\right]$.

* ص = 1

|ص| = 1 ، عـ (ص) = 0

إذن ص = تجب 0 + جب 0 أو ص = [1 ، 0]

* ص = − 3 ت

|ص| = 3 ، عـ (ص) = $-\frac{\pi}{2}$.

إذن : ص = 3 [تجب ($-\frac{\pi}{2}$) + ت جب ($-\frac{\pi}{2}$)] = 3 (تجب $\frac{\pi}{2}$ − ت جب $\frac{\pi}{2}$).

أو ص = [3 ، $-\frac{\pi}{2}$] .

* ص = − 5

|ص| = 5 ، . عـ (ص) = π

إذن : ص = 5 (تجب π + ت جب π) أو ص = [5 ، π].

* ص = 1 + ت $\sqrt{3}$

* |ص| = 2 ، $\begin{cases} \text{تجب } \theta = \frac{1}{2} \\ \text{جب } \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftarrow \vartheta \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

إذن ص = 2 (تجب $\frac{\pi}{3}$ + ت جب $\frac{\pi}{3}$) أو ص = [2 ، $\frac{\pi}{3}$]

2 – أكتب الأعداد المركبة الآتية بشكلها الجبري :

ص = $\left[2 ، \frac{\pi}{4}\right]$ ، صَ = $\left[5 \quad \frac{-\pi}{2}\right]$.

الحل :

* ص = $[\, 2 ، \frac{\pi}{4} \,]$

أ = 2 تجب $\frac{\pi}{4}$ = $\sqrt{2}$ ، ب = 2 جب $\frac{\pi}{4}$ = $\sqrt{2}$.

إذن ص = $\sqrt{2}$ + $\sqrt{2}$ ت

* ص = $[\, 5 ، \frac{\pi}{2} \,]$

أ = 5 تجب $(-\frac{\pi}{2})$ = 5 جب $\frac{\pi}{2}$ = 0.5 = 0

ب = 5 جب $(-\frac{\pi}{2})$ = − 5 جب $(\frac{\pi}{2})$ = − 5

إذن ص = − 5 ت .

7 – 4 – طويلة وعمدة مجموع عددين مركبين :

ليكن العددان المركبان ص ، صَ صورتاهما الشعاعيتان $\overleftarrow{\text{ش}}$ ، $\overleftarrow{\text{شَ}}$ على الترتيب.

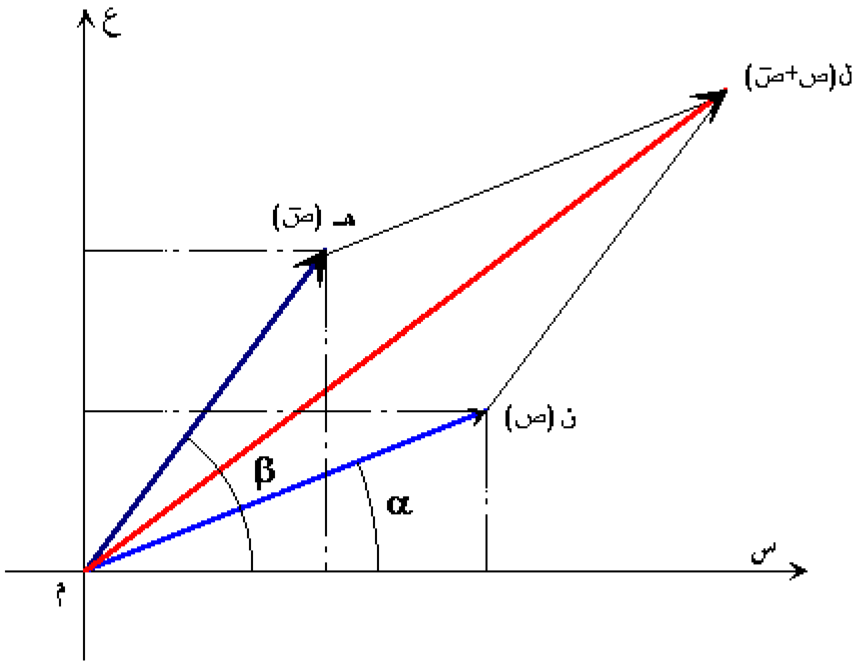
لدينا : $\left\| \overleftarrow{\text{ش}} + \overleftarrow{\text{شَ}} \right\| \leq \left\| \overleftarrow{\text{ش}} \right\| + \left\| \overleftarrow{\text{شَ}} \right\|$ (لأن : في مثلث كل ضلع أصفر من مجموع طولي الضلعين الآخرين)

وباستعمال الأعداد المركبة نكتب : $\left| \text{ص} + \text{صَ} \right| \leq \left| \text{ص} \right| + \left| \text{صَ} \right|$

ولا تتحقق المساواة إلا إذا كان للشعاعين $\overleftarrow{\text{ش}}$ ، $\overleftarrow{\text{شَ}}$ نفس المنحنى أي إذا كان للعددين المركبين ص ، صَ نفس العمدة.

إذن : عـ (ص) = عـ (صَ) $\Leftarrow$ $\left| \text{ص} + \text{صَ} \right| = \left| \text{ص} \right| + \left| \text{صَ} \right|$

ولا نستطيع تحديد عمدة المجموع إلا إذا كان للعددين المركبين نفس الطويلة وعندئذ يكون [م ل) منصفًا للزاوية ($\overleftarrow{\text{م ن}}$ ، $\overleftarrow{\text{م هـ}}$) كما في الشكل :



و في هذه الحالة يكون :

$$\text{عـ (ص + صَ)} = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\text{عـ (ص) + عـ (صَ)}}{2}$$

7 – 5 – طويلة وعمدة جداء عددين مركبين :

ليكن العددان المركبان : ص = ر (تجب θ + ت جب θ)

صَ = رَ (تجب θ' + ت جب θ')

ص × صَ = [ر (تجب θ + ت جب θ] × [رَ (تجب θ' + ت جب θ')]

= ر رَ [تجب θ . تجب θ' − جب θ . جب θ' + ت(تجب θ جب θ'

+ جب θ . تجب θ')]

= ر رَ [تجب ($\theta + \theta'$) + ت جب ($\theta + \theta'$)]

والكتابة الأخيرة تدل على أن العدد المركب ص صَ كتب على شكله المثلثي حيث طويلته : ر رَ و عمدته : $\theta + \theta'$.

إذن : $|\text{ص} + \text{صَ}| = |\text{ص}| + |\text{صَ}|$

+ عـ [ص . صَ) = عـ (ص) + عـ (صَ) .

ونكتب إختصارًا : [ر ، θ] × [رَ ، θ'] = [ر رَ ، $\theta + \theta'$]

ويمكن تعميم ذلك :

$$[\text{ر}_1 ، \theta_1] \times [\text{ر}_2 ، \theta_2] \times \ldots\ldots \times [\text{ر}_\text{ن} ، \theta_\text{ن}] = [\text{ر}_1 \times \text{ر}_2 \times \ldots \times \text{ر}_\text{ن} ، \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_\text{ن}]$$

وفي حالة خاصة نبرهن بالتراجع أن : $[\text{ر} ، \theta]^{\text{ن}} = [\text{ر}^{\text{ن}} ، \text{ن}\theta]$

يسمى هذا الدستور " دستور مواقر "(Formule de Moivre)

ويكتب بشكل آخر :

$$\boxed{[\text{ر}(\text{تجب}\,\theta + \text{ت جب}\,\theta)]^{\text{ن}} = \text{ر}^{\text{ن}}(\text{تجب ن}\,\theta + \text{ت جب ن}\,\theta)}$$

من أجل ر = 1 فإن : $(\text{تجب}\,\theta + \text{ت جب}\,\theta)^{\text{ن}} = \text{تجب ن}\,\theta + \text{ت جب ن}\,\theta$

7 – 6 طويلة وعمدة حاصل قسمة عددين مركبين :

لتكن الأعداد المركبة : ص $[\text{ر}،\theta]$ ، صَ = $[\text{رَ}،\theta']$ ، صً = $[\text{رً} ، \theta'']$

فإذا كان : صً = $\dfrac{\text{ص}}{\text{صَ}}$ فإن : ص = صَ . صً (صَ $\neq 0$)

أي : $[\text{ر}، \theta] = [\text{رَ}، \theta'] \times [\text{رً}، \theta''] = [\text{رَ رً} ، \theta' + \theta'']$

وبالمطابقة يكون لدينا :

$$\begin{cases} \text{ر} = \text{رَ رً} \\ \theta = \theta' + \theta'' \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} \text{رً} = \dfrac{\text{ر}}{\text{رَ}} \\ \theta'' = \theta - \theta' \end{cases}$$

إذن : $\dfrac{[\text{ر} ، \theta]}{[\text{رَ}، \theta']} = \left[\dfrac{\text{ر}}{\text{رَ}} ، \theta - \theta'\right]$ أي أن : $\left|\dfrac{\text{ص}}{\text{صَ}}\right| = \dfrac{|\text{ص}|}{|\text{صَ}|}$.

عمدة $\left(\dfrac{\text{ص}}{\text{صَ}}\right)$ = عـ (ص) – عـ (صَ).

* **حالة خاصة** : مقلوب عدد مركب :

ليكن العدد المركب ص الغير معدوم حيث ص = $[\text{ر} ، \theta]$

$$\frac{1}{\text{ص}} = \frac{1}{[\text{ر} ، \theta]} = \frac{[1،0]}{[\text{ر} ، \theta]} = \left[\frac{1}{\text{ر}} ، -\theta\right].$$

أي أن : $\left|\dfrac{1}{\text{ص}}\right| = \dfrac{1}{|\text{ص}|}$ ، عـ $\left(\dfrac{1}{\text{ص}}\right)$ = – عـ (ص)

مثال : ص = 1 + ت $\sqrt{3}$.

رأينا سابقا أن ص = $\left[2 \text{ ، } \frac{\pi}{3}\right]$.

$$\frac{1}{ص}=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}\,ت \text{ ، } \frac{1}{ص}=\left[\frac{1}{2}\text{ ، }\frac{\pi}{3}\right].$$

8 – متطابقات مثلثية :

رأينا دستور " موافر " وهو :

$$\left(\text{تجب}\,\theta+ت\,\text{جب}\,\theta\right)^{ن}=\text{تجب}\,ن\theta+ت\,\text{جب}\,ن\theta$$

وبنشر الطرف الأول اعتمادًا على دستور "نيوتن" لذي الحدّين نجد أن :

$$\left(\text{تجب}\,\theta+ت\,\text{جب}\,\theta\right)^{ن}=\text{تجب}^{ن}\theta+ق_{ن}^{1}\,\text{تجب}^{ن-1}\theta\left(ت\,\text{جب}\,\theta\right)+ق_{ن}^{2}\,\text{تجب}^{ن-2}\theta\left(ت\,\text{جب}\,\theta\right)^{2}+\ldots+\left(ت\,\text{جب}\,\theta\right)^{ن}$$

وبالتعويض في دستور موافر والمطابقة ينتج :

$$\text{تجب}\,ن\theta=\text{تجب}^{ن}\theta-ق_{ن}^{2}\,\text{تجب}^{ن-2}\theta\,\text{جب}^{2}\theta+ق_{ن}^{4}\,\text{تجب}^{ن-4}\theta\,\text{جب}^{4}\theta+\ldots$$

و

$$\text{جب}\,ن\theta=ق_{ن}^{1}\,\text{تجب}^{ن-1}\theta\,\text{جب}\,\theta-ق_{ن}^{3}\,\text{تجب}^{ن-3}\theta\,\text{جب}^{3}\theta+ق_{ن}^{5}\,\text{تجب}^{ن-5}\theta\,\text{جب}^{5}\theta+\ldots$$

فإذا أردنا حساب ظل ن θ بدلالة قوى ظل θ فما علينا إلاّ وضع .

$$\text{ظل}\,ن\theta=\frac{\text{جب}\,ن\theta}{\text{تجب}\,ن\theta}$$

أمثلة :

1 – من أجل ن = 2

$$\left(\text{تجب}\,\theta+ت\,\text{جب}\,\theta\right)^{2}=\text{تجب}\,2\theta+ت\,\text{جب}\,2\theta$$

$$\text{تجب}\,2\theta=\text{تجب}^{2}\theta-\text{جب}^{2}\theta \quad \text{و} \quad \text{جب}\,2\theta=2\,\text{جب}\,\theta\,\text{تجب}\,\theta$$

2 – من أجل ن = 4

$$\text{تجب}\,4\theta=\text{تجب}^{4}\theta-ق_{4}^{2}\,\text{تجب}^{2}\theta\,\text{جب}^{2}\theta+ق_{4}^{4}\,\text{تجب}^{0}\theta\,\text{جب}^{4}\theta$$

$$=\text{تجب}^{4}\theta-6\,\text{تجب}^{2}\theta\,\text{جب}^{2}\theta+\text{جب}^{4}\theta$$

$$\text{جب}\,4\theta=ق_{4}^{1}\,\text{تجب}^{3}\theta\,\text{جب}\,\theta-ق_{4}^{3}\,\text{تجب}\,\theta\,\text{جب}^{3}\theta$$

$$= 4 \quad \text{تجب}^3\theta \ \text{جب}\ \theta - 4 \quad \text{تجب}\ \theta \ \text{جب}^3\theta$$

فلحساب ظل 4 θ :

$$\text{ظل } 4\theta = \frac{\text{جب } 4\theta}{\text{تجب } 4\theta} = \frac{4 \ \text{تجب}^3\theta \ \text{جب}\ \theta - 4 \ \text{تجب}\ \theta \ \text{جب}^3\theta}{\text{تجب}^4\theta - 6 \ \text{تجب}^2\theta \ \text{جب}^2\theta + \text{جب}^4\theta}$$

وبقسمة كل من الصورة والمخرج على $\text{تجب}^4\theta$ ينتج :

$$\text{ظل } 4\theta = \frac{4 \ \text{ظل}\ \theta - 4 \ \text{ظل}^3\theta}{1 - 6 \ \text{ظل}^2\theta + \text{ظل}^4\theta}$$

تمرين : أعد المسألة من أجل ن = 5

9 - العبارة الخطية لِـ : $\text{تجب}^{ن}\theta$ ، $\text{جب}^{ن}\theta$:

يبرهن إعتمادًا على دستور النشر " لتايلور " (TAYLOR) أن المساواة الآتية محققة :

$\forall\ \theta \in$ ح تجب θ + ت جب θ = $هـ^{ت\theta}$ .... (*)

(هـ : عدد حقيقي ثابت يساوي 2.71 تقريبا).

وهكذا ينتج شكل جديد للأعداد المركبة يدعى "الشكل الأُسّي " .

حيث : ر (تجب θ + ت جب θ) = ر $هـ^{ت\theta}$

وتطبق خواص القوى في هذه الأعداد حيث :

$$هـ^{ت\theta} \times هـ^{ت\theta'} = هـ^{ت(\theta+\theta')}$$

$$\frac{1}{هـ^{ت\theta}} = هـ^{-ت\theta} \text{ . وهكذا . . . .}$$

لنستبدل في العلاقة (*) بِـ : (θ−) فنجد :

$\text{تجب}\ \theta - \text{ت جب}\ \theta = هـ^{-ت\theta}$. وبجمع هذه العلاقة مع العلاقة (*)

ينتج : 2 تجب θ = $هـ^{ت\theta} + هـ^{-ت\theta}$

$$\text{أي تجب } \theta = \frac{هـ^{ت\theta} + هـ^{-ت\theta}}{2}$$

و بطرح العلاقة نفسها من العلاقة (*) ينتج :

$$\text{جب } \theta = \frac{هـ^{ت\theta} + هـ^{-ت\theta}}{2\ ت}$$

يسمى هذان الدستوران الناتجان " دستور أولر " (" formules d'Euler") وبفضلهما يمكن كتابة قوى الجيب والتجيب بشكل خطي .

* **أمثلة :**

1- $تجب^2 \theta = \left(\frac{هـ^{ت\theta} + هـ^{-ت\theta}}{2}\right)^2 = \frac{هـ^{2ت} + 2 + هـ^{-2ت}}{4} = \frac{1 + تجب 2\theta}{2}$

2 - $جب^6 \theta = \frac{1}{32}(- تجب 6\theta + 6 \quad تجب 4\theta - 15 \quad تجب 2\theta + 10)$

10 - العدد المركب المرافق :

10 - 1 تعريف :

ليكن العدد المركب ص = أ + ت ب . يُسمى العدد المركب : أ − ت ب مرافق العدد المركب ص ويرمز له: $\overline{ص}$ ونكتب : $\overline{ص}$ = أ − ت ب

مثال : ص = 1 − 2 ت ، $\overline{ص}$ = 1 + 2 ت

ص = − 3 ت ، $\overline{ص}$ = 3 ت

ص = 1 ، $\overline{ص}$ = 1

نتائج :

1 - $\forall$ ص $\in$ م: $\overline{(\overline{ص})} = ص$

2 − إذا كان ص حقيقيا فإن : $\overline{ص}$ = ص .

3 − ص + $\overline{ص}$ = 2 أ

4 − ص − $\overline{ص}$ = 2 ت ب .

5 − ص × $\overline{ص}$ = أ^2+ب^2 = $|ص|^2$.

6 - $\forall ص_1 \in$ م ، $\forall ص_2 \in$ م: $\overline{ص_1 \times ص_2} = \overline{ص_1} \times \overline{ص_2}$

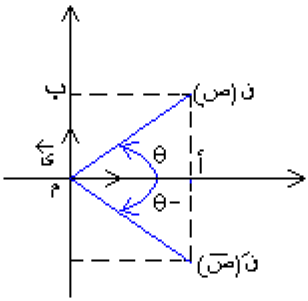
$\overline{\left(\frac{ص_1}{ص_2}\right)} = \frac{\overline{ص_1}}{\overline{ص_2}}$ و (ص$_2 \neq 0$)

$\overline{ص_1 + ص_2} = \overline{ص_1} + \overline{ص_2}$

7 - $\forall$ ص $\in$ م*: $\overline{\left(\frac{1}{ص}\right)} = \frac{1}{\overline{ص}}$:

10 – 2 - طويلة وعمدة العدد المركب المرافق :

ليكن العدد المركب ص =أ + ت ب صورته النقطة ن (أ ، ب) في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(م ، \overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ي}\right)$ وليكن مرافقه $\overline{ص}$ =أ – ت ب صورته النقطة نَ (أ ، – ب) كما في الشكل :



واضح من خلال الشكل أ ن :

$$\left|\overline{ص}\right| = \left|ص\right| \text{ و } ع\left(\overline{ص}\right) = -ع\left(ص\right)$$

10 – 3 - تطبيق هام :

لإجراء أية عملية تقسيم في م يكفي ضرب الكسر في مرافق المخرج .

$$ص=\frac{أ+ت ب}{د+جـ ت}=\frac{أ+ت ب}{د+جـ ت}\times\frac{د-جـ ت}{د-جـ ت}$$

$$=\frac{أ د+ب جـ}{د^2+جـ^2}+\frac{ب د-أ جـ}{د^2+جـ^2}ت$$

ولنطبّق ذلك الحساب : ص = $\frac{3+2ت}{2ت}$

$$ص=\frac{3+2ت}{2ت}\times\frac{-2ت}{-2ت}=\frac{4-6ت}{4}=1-\frac{3}{2}ت$$

تطبيق : أثبت أنه من أجل كل ص من م* لدينا :

1 - $ص^{-1}=\left|ص\right|^{-2}.\overline{ص}$

2 - $\left(\overline{ص}\right)^{ن}=\left(\overline{ص^{ن}}\right)$

الحل :

1 - . $ص^{-1}=\frac{1}{ص}=\frac{1}{ص}.\frac{\overline{ص}}{\overline{ص}}=\frac{\overline{ص}}{ص.\overline{ص}}=\frac{\overline{ص}}{\left|ص\right|^2}=\left|ص\right|^{-2}.\overline{ص}$

2 $\left(\overline{ص}\right)^{ن}=\underbrace{\overline{ص}\times\overline{ص}\times\overline{ص}\times.......\times\overline{ص}}_{ن \text{ مرة}}=\overline{ص\times ص\times..........\times ص}=\overline{ص^{ن}}$

11 - الجذور النونية لعدد مركب :

11 – 1 * الجذران التربيعيان :

نقول عن عدد مركب ص = [ر، θ] أنه جذرًا تربيعيان لعدد مركب آخر. ل = [رَ، θَ]

إذا كان : ص^2=ل أي :

$$[\text{ر}،\theta]^2=[\text{رَ}،\theta'] \Leftrightarrow [\text{ر}^2،2\theta]=[\text{رَ}،\theta'] \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ر}^2=\text{رَ} \\ 2\theta=\theta'+2\text{ك}\pi \ / \ \text{ك} \in \text{ص} \end{cases}$$

أي أن : $\begin{cases} \text{ر}=\sqrt{\text{رَ}} \\ \theta=\dfrac{\theta'}{2}+\text{ك}\pi \end{cases}$

وحسب قواعد المثلثات لدينا مجموعتان من الحلول من أجل ك = 0 ، ك = 1 .

أ ي : ص$_1$ = $\left[\sqrt{\text{رَ}}،\dfrac{\theta'}{2}\right]$ وَ ص$_2$ = $\left[\sqrt{\text{رَ}}،\dfrac{\theta'}{2}+\pi\right]$

إذن : للعدد المركب ل جذران تربيعيان لهما نفس الطويلة وفرق عمدتيهما π حيث :

$$\text{ص}_2=\sqrt{\text{رَ}}\left[\text{تجب}\left(\frac{\theta'}{2}+\pi\right)+\text{تجب}\left(\frac{\theta'}{2}+\pi\right)\right]=\sqrt{\text{رَ}}\left[\text{تجب}\frac{\theta'}{2}-\text{ت}-\text{جب}\frac{\theta'}{2}\right]-\text{ص}_1$$

11 – 2 البحث عن الجذرين التربيعيين لعدد مركب :

نتّبع الطريقة السابقة إذا أمكن كتابة العدد المركب ل على شكله المثلثي. أما إذا تعذّر ذلك فإننا نقوم بطريقة جبرية كما يلي :

نضع : ص = س + ت ع ، ل = α + ت β

$$\text{ص}^2=\text{ل} \Leftrightarrow (\text{س}+\text{ت ع})^2=\alpha+\text{ت}\,\beta$$

وبالنّشر والمطابقة ينتج : $\begin{cases} \text{س}^2-\text{ع}^2=\alpha \ ...(1) \\ 2\,\text{س ع}=\beta \ ......(2) \end{cases}$

بالإضافة إلى معادلة إضافية هي تساوي طويلتي ص^2 وَ ل أي :

$$\text{س}^2+\text{ع}^2=\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \ .....(3)$$

فلحساب س ، ع نحل جملة المعادلات الثلاثة ونفضل جمع الأولى مع الثالثة فنحصل على س ثم نعوض في الثانية فنحصل على ع.

مثـال : أحسب الجذرين التربيعيين للعدد المركب : ل $=-\sqrt{3}+$ ت .

الحل :

نفرض ص = س + ت ع / (س ، ع) $\in$ ح^2

عندئذ يكون : $س^2-ع^2=-\sqrt{3}$ . . . . . (1)

2 س ع = 1 . . . . . . (2)

$س^2+ع^2 = 2$ . . . . . . (3)

بجمع المعادلتين (1) ، (3) ينتج : $2س^2 = -\sqrt{3}+2$

أي : $س^2 = \frac{-\sqrt{3}+2}{2}$

$$س^2 = \frac{4-2\sqrt{3}}{4} = \frac{3-2\sqrt{3}+1}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 \Leftarrow \begin{cases} س = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \text{أو} \\ س = \frac{-\sqrt{3}+1}{2} \end{cases}$$

و بالتعويض في المعادلة (2) ينتج :

$$ص = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + ت\frac{1}{\sqrt{3}-1} \quad \text{أو} \quad ص = \frac{\sqrt{3}+1}{2} - ت\frac{1}{\sqrt{3}-1}$$

11 – 3 الجذور النونية لعدد مركب :

من أجل كل ن من ط*. نقول عن العدد المركب ص = [ر، θ] أنه جذرًا نونيا للعدد المركب ل = [رَ، θ'] إذا كان : ص^ن=ل

$$[ر ، \theta]^ن = [رَ ، \theta'] \Leftrightarrow \begin{cases} ر^ن = رَ \\ ن\theta = \theta' + 2 ك \pi \ / \ ك \in ص \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ر = (رَ)^{\frac{1}{ن}} \\ \theta = \frac{\theta'}{ن} + \frac{2 ك\pi}{ن} \end{cases}$$

وللجملة ن مجموعة من الحلول حسب قيم ك .

نرمز للجذر العام ص$_{ك}$ فنجد أن : ص$_{ك}$ $= \left[ر^{\frac{1}{ن}} ، \frac{\theta}{ن} + \frac{2ك\pi}{ن} \right]$

ولإيجاد الجذور نعوّض ك بالقيم : 0 ، 1، . . . . . ، ن − 1. فنحصل على الجذور :

ص$_{0}$ ، ص$_{1}$ .... ، ص$_{ن-1}$.

إذن لكل عدد مركب ن جذرًا نونيا .

مثال :

أوجد الجذور التكعيبية للعدد المركب : ص = − 8 ت .

لدينا ص $= \left[8 ، -\frac{\pi}{2} \right]$

ص$_{0}$ $= \left[2 ، -\frac{\pi}{6} \right]$ ، ص$_{1}$ $= \left[2 ، -\frac{\pi}{2} \right]$ ، ص$_{2}$ $= \left[2 ، -\frac{7\pi}{6} \right]$

لأن : $\left\{ \begin{array}{l} ر^{3} = 8 \\ 3\theta = -\frac{\pi}{2} + 2ك\pi \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} ر = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2ك\pi}{3} \end{array} \right.$

12 - ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية في م :

نسمّي ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية بالنسبة للمتغير المركب ص كل دالة مركّبة من الشكل : ص ← تا (ص) = أ ص^{2} + ب ص + جـ /أ ، ب ، جـ ، ص أعداد مركبة (أ ≠ 0).

يمكن كتابة تا(ص) على شكله النموذجي كما يلي :

$$تا(ص) = أ\left[\left(ص + \frac{ب}{2أ} \right)^{2} - \frac{ب^{2} - 4أ جـ}{4أ^{2}} \right] ، \Delta = ب^{2} - 4 أ جـ .$$

وبما أن Δ ينتمي إلى م فله دوما جذران نرمز لهما :+δ ، −δ.

$$تا(ص) = أ\left[\left(ص + \frac{ب}{2أ} \right)^{2} - \left(\frac{\delta}{2أ} \right)^{2} \right] = أ\left[\left(ص + \frac{ب-\delta}{2أ} \right) \right]\left[\left(ص + \frac{ب+\delta}{2أ} \right) \right]$$

$$تا(ص) = 0 \Leftrightarrow ص = \frac{-ب + \delta}{2أ} \quad أو \quad ص = \frac{-ب - \delta}{2أ}$$

أي أن للمعادلة من الدرجة الثانية حلاّن دائما في م.

حالة خاصة :

إذا كانت المعاملات أ ، ب ، جـ أعدادًا حقيقية عندئذ إذا كان $ص_0$ حلا للمعادلة تا (ص) = 0 فإن $\overline{ص_0}$ حلا لها.

لأن : $أ ص_0^2 + ب ص_0 + جـ = 0 \Leftrightarrow \overline{أ ص_0^2 + ب ص_0 + جـ} = \overline{0}$

وحسب الخواص يكون : $أ \overline{ص}_0^2 + ب \overline{ص}_0 + جـ = 0$ أي أن : $\overline{ص}_0$ حل للمعادلة .

إذن : لكل معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة للمتغير المركب ص، معاملاتها أعداد حقيقية، حلاّن مترافقان أو حقيقيان .

مثال :

حل في المجموعة م المعادلة : $ص^2 - 2(1+ت) ص + 2 ت = 0$

13 - تمارين التصحيح الذاتي :

13 – 1 أحسب الجزء الحقيقي والجزء التحليلي لكل من الأعداد المركبة الآتية :

$$ص = \frac{1}{1+ت} + \frac{1}{1-ت} \quad ، \quad ل = \frac{(1+ت)^9}{(1-ت)^7} .$$

13 - 2 : ليكن كثير الحدود : تا (ص) = $ص^2 + 2 ص + 2 ت + 1$

بين أن تا(ص) يقبل القسمة على ص + ت ثم حل المعادلة : تا(ص) = 0

13 – 3 : عين المجموعتين :

س = { ص : ص ∋ م / (ص – 1) ($\overline{ص}$ - ت)∋ ح }

ع ={ ص : ص ∋ م / (|ص|-1) ($|\overline{ص}|$ - ت) = 0 }

13 – 4 - حل المعادلات الآتية :

* $ص^2 - (3 + ت)\, ص + 2 + ت = 0$
* $ص^3 = -1$

* $ص^4 = 1 + ت$

* $ص^6 + ص^3 - 2 = 0$

13 – 5 – ليكن ص ، ل عددان مركبان طويلة كل منهما تساوي 1.

برهن أن العدد المركب : $ك = \frac{ص + ل}{1 + ص\,ل} \in ح$

14 - أجوبة التصحيح الذاتي :

14 - 1 : * $ص = \frac{1}{1+ت} + \frac{1}{1-ت} = \frac{1-ت}{(1+ت)(1-ت)} + \frac{1+ت}{(1-ت)(1+ت)}$

$$= \frac{1-ت}{2} + \frac{1+ت}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

فالقسمان الحقيقي والتحليلي للعدد المركب ص هما : 1 ، 0 على الترتيب.

* $ل = ل = \frac{(1+ت)^9}{(1-ت)^7}$ نفضل استعمال الشكل المثلثي عندما تكون الأسس كبيرة (أكبر من 3).

$$1+ت = \left[\sqrt{2} ، \frac{\pi}{4}\right] ، 1-ت = \left[\sqrt{2} ، -\frac{\pi}{4}\right]$$

$$[1+ت]^9 = \left[\sqrt{2} ، \frac{\pi}{4}\right]^9 = \left[\sqrt{2}^9 ، \frac{9\pi}{4}\right] = \left[\sqrt{2}^9 ، \frac{\pi}{4} + 2\pi\right] = \left[\sqrt{2}^9 ، \frac{\pi}{4}\right]$$

$$[1-ت]^7 = \left[\sqrt{2}^7 ، -\frac{7\pi}{4}\right] = \left[\sqrt{2}^7 ، 2\pi - \frac{\pi}{4}\right] = \left[\sqrt{2}^7 ، \frac{\pi}{4}\right]$$

وعلى هذا الأساس فإن :

$$ل = \frac{\left[\sqrt{2}^9 ، \frac{\pi}{4}\right]}{\left[\sqrt{2}^7 ، \frac{\pi}{4}\right]} = \left[\sqrt{2}^2 ، 0\right] = 2 .$$

فالقسمان الحقيقي والتخيلي للعدد المركب ل هما : 2 ، 0 على الترتيب

14 – 2 حتى يقبل تا (ص) القسمة على ص + ت يجب أن يكون تا (– ت) = 0

$$تا\,(-ت) = (-ت)^2 + 2\,(-ت) + 2\,ت + 1 = 0$$

إذن تا (ص) يقبل القسمة على ص + ت. وعندئذ : ∀ ص ∋ م : تا (ص) = (ص + ت) (أ ص + جـ) / (أ ، جـ) ∋ م^* × م :

= أ ص^2 + جـ ص+ أ ص ت + جـ ت.

= أ ص^2 + (جـ +أ ت) ص + جـ ت.

و بالمطابقة يكون : أ = 1 ، جـ = 2 – ت .

إذن : تا (ص) = (ص + ت) (ص + 2 – ت)

تا (ص) = 0 ⟺ ص = – ت أو ص = – 2 + ت

ملاحظة : يمكن حل هذا التمرين باستعمال نظرية مجموع أو جداء الجذرين.

14 – 3 : * **س** = { ص ∋ م / (ص – 1) ($\overline{\text{ص}}$ – ت) ∋ ح }

بوضع : ص = س + ت ع / (س ، ع) ∋ ح^2

عندئذ يكون :

(ص – 1) ($\overline{\text{ص}}$ – ت) = (س + ت ع – 1) (س – ت ع – ت)

= س^2 – س ع ت – س ت + س ع ت + ع^2 + ع – س + ت ع + ت

= (س^2 + ع^2 – س + ع) + (– س + ع + 1) ت

(ص – 1) ($\overline{\text{ص}}$ – ت) ∋ ح ⟺ – س + ع + 1 = 0.

وهي معادلة مستقيم معامل توجيهه 1 ويشمل النقطتين : (0 ، –1) ، (1 ،0)

* **ع** = {ص ∋ م / (|ص| – 1) (|$\overline{\text{ص}}$| – ت) = 0}

$$(|\text{ص}|-1)(|\overline{\text{ص}}|-\text{ت}) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} |\text{ص}| = 1 \\ \text{أو} \\ |\overline{\text{ص}}| = \text{ت} \end{array}\right.$$

والحالة الثانية غير ممكنة لأن : الطرف الأول عدد حقيقي والطرف الثاني تحيلي صرف.

فإذا كان |ص| = 1 وبوضع : ص = س + ت ع / (س ، ع) ∋ ح^2

يكون : $\text{س}^2 + \text{ع}^2 = 1$

وهي معادلة دائرة مركزها المبدأ م (0 ، 0) ونصف قطرها نق = 1.

14 – 4 : * $\text{ص}^2 - (3+\text{ت})\,\text{ص} + 2 + \text{ت} = 0$

$$\Delta = (3+\text{ت})^2 - 4(2+\text{ت}) = 9 + 6\text{ت} - 1 - 8 - 4\text{ت} = 2\text{ت}$$

لا حظ أن : $2\text{ت} = \left[2 \text{ ، } \frac{\pi}{2}\right]$ ولـه جذران تربيعيان هما :

$$\delta_1 = \left[\sqrt{2} \text{ ، } \frac{\pi}{4}\right] \text{ ، } \delta_2 = \left[\sqrt{2} \text{ ، } \frac{\pi}{4} + \pi\right]$$

$$\delta_1 = \sqrt{2}\left(\text{تجب } \frac{\pi}{4} + \text{ت جب } \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \text{ت}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1+\text{ت} \ .$$

$$\delta_1 = \sqrt{2}\left(\text{تجب}\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right) + \text{ت جب}\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)\right) = -1-\text{ت}$$

إذن $\text{ص}_1 = \frac{-\text{ب} + \sqrt{\Delta}}{2\text{أ}} = \frac{3+\text{ت}+1+\text{ت}}{2} = 2+\text{ت}$

$\text{ص}_2 = \frac{-\text{ب} - \sqrt{\Delta}}{2\text{أ}} = \frac{3+\text{ت}-1-\text{ت}}{2} = \frac{2}{2} = 1$

* $\text{ص}^3 = -1$

نفرض : ص = $[\text{ر} \text{ ، } \theta]$ عندئذ يكون :

$[\text{ر} \text{ ، } \theta]^3 = [1 \text{ ، } \pi]$ (الشكل المثلثي)

$$[\text{ر}^3 \text{ ، } 3\theta] = [1 \text{ ، } \pi] \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ر}^3 = 1 \\ \text{وَ} \\ 3\theta = \pi + 2\text{ك}\pi \ / \ \text{ك} \in \text{ص} \end{cases}$$

أي $\text{ر} = 1$ وَ $\theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2\text{ك}\pi}{3}$

هناك ثلاثة حلول : $\left[1 \text{ ، } \frac{\pi}{3}\right] \text{ ، } \left[1 \text{ ، } \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right] \text{ ، } \left[1 \text{ ، } \frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right]$

* $\text{ص}^4 = 1+\text{ت}$

نفرض ص $[\text{ر} \text{ ، } \theta]$. علما بأن : $1+\text{ت} = \left[\sqrt{2} \text{ ، } \frac{\pi}{4}\right]$

عندئذ يكون : $[\text{ر} \text{ ، } \theta]^4 = \left[\sqrt{2} \text{ ، } \frac{\pi}{4}\right]$.

$$[ر^4 ، 4\theta] = \left[\sqrt{2} ، \frac{\pi}{4}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} ر^4 = \sqrt{2} \\ \text{و} \\ 4\theta = \frac{\pi}{4} + 2ك\pi \ / \ ك \in ص \end{cases}$$

إذن توجد أربعة حلول هي :

$$\left[\sqrt[8]{2} ، \frac{\pi}{16}\right] ، \left[\sqrt[8]{2} ، \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2}\right] ، \left[\sqrt[8]{2} ، \frac{\pi}{16} + \pi\right] ، \left[\sqrt[8]{2} ، \frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{2}\right].$$

* $ص^6 + ص^3 - 2 = 0$ ، نضع $ص^3 = ع$

$$ع^2 + ع - 2 = 0 \Leftrightarrow (ع-1)(ع+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ع = 1 \\ \text{أو} \\ ع = -2 \end{cases}$$

إذا كان ع = 1 فإن : $ص^3 = 1$ و بفرض ص = [ر ، θ] يكون :

$[ر ، \theta]^3 = [1 ، 0]$

$$[ر^3 ، 3\theta] = [1 ، 0] \Leftrightarrow \begin{cases} ر = 1 \\ \text{و} \\ \theta = \frac{2ك\pi}{3} \end{cases}$$

فهناك ثلاثة جذور هي : $[1 ، 0]$ ، $\left[1 ، \frac{2\pi}{3}\right]$ ، $\left[1 ، \frac{4\pi}{3}\right]$

أما إذا كان : ع = − 2 فإن : $ص^3 = -2$. ونحل بنفس الطريقة

14 – 5: ك $\in$ ح $\Leftrightarrow$ ك = $\overline{ك}$

$$\overline{ك} = \overline{\left(\frac{ص+ل}{1+ص ل}\right)} = \frac{\overline{ص+ل}}{\overline{1+ص.ل}} = \frac{\overline{ص}+\overline{ل}}{1+\overline{ص}.\overline{ل}} = \frac{\frac{1}{ص}+\frac{1}{ل}}{1+\frac{1}{ص}.\frac{1}{ل}} = \frac{\frac{ص+ل}{ص ل .}}{\frac{ص ل + 1}{ص ل}} = \frac{ص+ل}{1+ص ل} = ك$$

* **تذكير** :

إذا كانت طويلة العدد المركب تساوي 1 فإن مقلوبه يساوي مرافقه .

* **تنبيه** : بقية دروس الإرسال الأول تجدونها في الجزء الثاني.

فهرس السلسلة الخامسة

تتضمن هذه السلسلة درساً واحداً هو :

مبادئ في التحليل

الأهداف من الدرس :

– التعرف على المفاهيم الأساسية للتحليل الرياضي وهي :

– نهاية دالة عددية، إستمرارية دالة، قابلية الإشتقاق والمشتق

– التعرف على الخواص الأساسية لهذه المفاهيم والتمرن على إستغلالها في حساب النهايات والمشتقات.

– التمكن من الإستعمال السليم والمناسب لهذه المفاهيم والنتائج المتعلقة بها في دراسة تغيرات الدوال العددية.

المدة اللازمة لدراسته : 18 ساعة

الدرس الذي ينبغي مراجعته : عموميات حول الدوال العددية.

المراجع الخاصة بهذا الدرس :

كتاب الرياضيات 3 ث / ع +ر/المعهد التربوي الوطني.

تـصـمـيـم الـدرس

تـمـهـيـد :

إن دراسـة الـحـركـة (وخـاصـة الـسـقـوط الـحـر) مـن طـرف بعض العلماء أدت بهم إلى إدخال مفهوم الـلامـنـتـهـي فـي دراسـة الـدوال العددية. ومفهوم النهاية يشكل الحجر الأساسي لأهم فروع الرياضـيات وهـو الـتـحـلـيـل الـريـاضـي. ومـن هـذا المفهوم الأساسي إنبثقت عدّة مفاهيم متكاملة ومتفاوتة فـي الـتـعـقّـد كـلّـهـا تـشـكّـل وسـائـل لدراسة محلية التغيرات دالة عددية : الإستمرار، قابلية الإشتقاق، قابلية التكامل، . . . إلـخ.

وسـنـرى تطـبـيقات كـل هذه المفاهيم والـنـتـائج المـتعلّقة بهـا في دراسة الدوال العدديـة وخاصة الدوال الرتيبية تماماً.

1 - عمـومـيـات حـول الـدوال الـعـدديـة :

1 - 1 - تـعـاريـف :

1 - 1 - 1 * الـدالـة الـعـدديـة :

نـسـمـي دالـة عـدديـة ذات مـتـغـيـر حـقـيـقـي (عادة نكتفي بـالـعـبـارة " دالـة عـدديـة ") . كـل دالـة حيث مجموعتا الإنطلاق والوصـول جزءان من ح غير خاليين.

أمـثـلـة :

تـا: $ح^* \leftarrow ح^*$ هـا: $ح \leftarrow ح$

$س \leftarrow \sqrt{س}$ $س \leftarrow \frac{1}{س}$

لا: $ح \leftarrow ح$

عـا: $ح \leftarrow ح$

$س \mapsto$ جـب س $س \mapsto$ لا (س) حـيـث $لا(س) = \begin{cases} 2س & \text{إذا كـان } س \leq -3 \\ س^2 & \text{إذا كـان } -3 < س < 2 \\ \text{ظل س} & \text{إذا كـان } س \geq 2 \end{cases}$

1 - 1 - 2 - الـدوال الـعـدديـة الـمـألـوفـة :

كـثـيـرات الـحـدود : هـي مـن الـشـكـل :

تـا : س $\mapsto$ تـا(س) = $أ_ن س^ن + أ_{ن-1} س^{ن-1} + \ldots + أ_1 س + أ_0$

حيث $أ_ن$ ، $أ_{ن-1}$ ،...، $أ_1$ ، $أ_0$ عـوامـل حـقـيـقـيـة وَ ن عدد طـبـيـعـي

- الـدوال الـكـسـريـة : هـي مـن الـشـكـل :

تـا (س) = $\frac{ك(س)}{م(س)}$ حـيـث ك(س) وَ م(س) كـثـيـرا الـحـدود.

- الـدوال الـمـثـلـثـيـة : هـي

" الـجـيـب "، " الـتـجـيـب "، " الـظـل " و " الـتـظـل " والـدوال الـمـركـبـة مـنـهـا.

- الـدوال الـجـبـريـة الأخـرى :

مـثـل : تـا : س $\mapsto \sqrt{س}$ ، هـا : س $\mapsto |س|$

1 – 1 – 3 – مجموعة التعريف :

مجموعة تعريف الدالة : تا: ح ← ح هي مجموعة عناصر ح التي توجد لها صور في ح ونكتب:

$$ف_{تا} = \{ س \in ح / (ع \in ح) و (ع = تا(س)) \}$$

أمثلة :

تا: س ↦ $\frac{1}{س}$ ف$_{تا}$ = ح*

ها: س ↦ $\sqrt{س}$ ف$_{ها}$ = ح$^+$

ظل : س ↦ ظل(س) ف$_{ظل}$ = ح − $\{\frac{\pi}{2} + ك\pi$ و ك ∈ ص$\}$

1 – 1 – 4 – إقتصار دالة عددية :

أ ، أ و ب أجزاء من ح

نسمي إقتصار الدالة : تا : أ ← ب إلى أ، حيث أ⊃ أ ، الدالة ها : أ ← ب التي تحقق :

∀س ∈ أ : ها(س) = تا(س).

أمثلة :

* تا $[0،\pi]$ ← ح هي إقتصار للدالة : جب المعرفة في ح.

س ↦ جب س.

* ها : ط←ط هي إقتصار للدالة س ↦ س^2 المعرفة من ح إلى ح

س ↦ س^2

1 – 1 – 5 – تمديد دالة عددية :

نقول عن ها أنها إمتدادا لـ : تا إذا كانت تا إقتصاراً لِـ : ها

1 – 1 – 6 – الدوال الزوجية والدوال الفردية :

تا دالة عددية لمتغير حقيقي س و ف$_{تا}$ مجموعة تعريفها

نقول عن الدالة العددية تا أنها :

* زوجية إذا حققت : (∀ س ∈ ف$_{تا}$)(− س∈ ف$_{تا}$) وَ تا(−س) = تا(س).

* فرديـة إذا حققت : ($\forall$ س∋ ف $_{تا}$)(−س∋ ف $_{تا}$) وَ تـا(−س) = −تـا(س).

أمـثـلـة :

(كل الـدوال الآتـيـة مـعـرفـة مـن ح إلى ح)

* تـا : س ↤ − 3س^2+2 . دالـة زوجـيـة.

*هـا : س ↤ $\frac{5}{س}$. دالـة فـرديـة.

* الـجـيـب دالـة فـرديـة والـتـجـيـب دالـة زوجـيـة لأن :

$$\forall س \in ح : \begin{cases} تجب(-س) = تجب\ س \\ جب(-س) = -\ جب\ س \end{cases}$$

* عـا : س ← جب س + تـجـب س. لـيـسـت فـرديـة ولا زوجـيـة

1 – 1 – 7 – الـدوال الـدوريـة :

نـقـول عـن دالـة تـا أنـهـا دوريـة ودورهـا ط إذا تـحـقـق الـشـرط :
($\forall$س ∋ ف $_{تا}$) ((س + ط)∋ ف $_{تا}$) وَ تـا(س + ط) = تـا(س)).

أمـثـلـة :

* الـجـيـب والـتـجـيـب دالـتان دوريـتـان ودور كـل مـنـهـما هـو2π.

* الـظـل والـتـظـل دالـتـان دوريـتـان ودور كـل مـنـهـمـا هـو π

* تـا : س ← جب (5 س + $\frac{\pi}{2}$) دورهـا هـو $\frac{2\pi}{5}$ (تـحـقـق مـن ذلـك).

1 – 2 – الـعـمـلـيـات عـلـى الـدوال الـعـدديـة :

إذا كـانـت تـا وَ هـا دالـتـيـن عـدديـتـيـن مـعـرفـتـيـن فـي نـفـس الـمـجـمـوعـة ف.

تُعرّف الدوال : تـا + هـا ، تـا.هـا ، $\frac{تا}{ها}$ ، $\sqrt{تا}$وَ (تا)^{ن}، (ن ∋ط*)كمـا يلي.

*($\forall$س∋ ف)(تـا + هـا) (س) = تـا(س) + هـا(س).

*($\forall$س∋ ف)(تـا.هـا) (س) = تـا(س).هـا(س)

*($\forall$س∋ ف)(هـا(س)≠ 0)($\frac{تا}{ها}$)(س) = $\frac{تا(س)}{ها(س)}$.

*$(\forall$ س $\in$ ف $)($تـا$)^{ن}($س$) = [$ تـا$($س$)]^{ن}$.

*$(\forall$ س $\in$ ف $)($تـا$($س$) \geq 0)$ $\sqrt{\text{تـا}}$ $($س$) = \sqrt{\text{تـا}(\text{س})}$.

1 – 3 – تـغيـرات الـدوال الـعدديـة :

لـتكـن تـا دالـة عدديـة مـعرفـة فـي مـجـال ل مـن ح .

نـقـول عـن تـا إنــهـا :

*مـتـزايـدة فـي ل إذا كـان :

$(\forall$ أ $\in$ ل$)(\forall$ ب$\in$ ل$)$ $($أ $<$ ب$\Leftarrow$ تـا$($أ$)\leq$ تـا$($ب$))$.

*مـتـنـاقـصـة فـي ل إذا كـان :

$(\forall$ أ $\in$ ل$)$ $(\forall$ ب$\in$ ل$)$ $($أ $<$ ب$\Leftarrow$ تـا$($أ$)\geq$ تـا$($ب$))$.

*ثـابـتـة فـي ل إذا كـان :

$(\forall$ أ $\in$ ل$)$ $(\forall$ ب$\in$ ل$)$ $($ تـا$($أ$) =$ تـا$($ب$))$.

*رتـيـبـة فـي ل إذا كـانـت إمـا مـتـزايـدة إمـا مـتـنـاقـصـة إمـا ثـابـتـة فـي ل.

*مـتـزايـدة تـمـامـاً إذا كـان :

$(\forall$ أ $\in$ ف$)$ $(\forall$ ب$\in$ ف$)$ $($أ $<$ ب$\Leftarrow$ تـا$($أ$)<$ تـا$($ب$))$.

*مـتـنـاقـصـة تـمـامـاً إذا كـان :

$(\forall$ أ $\in$ ف$)$ $(\forall$ ب$\in$ ف$)$ $($أ $<$ ب$\Leftarrow$ تـا$($أ$) >$ تـا$($ب$))$.

*رتـيـبـة تـمـامـاً إذا كـانـت إمـا مـتـزايـدة تـمـامـاً إمـا مـتـنـاقـصـة تـمـامـاً فـي ل .

أمـثـلـة :

تـا : س $\longmapsto \frac{1}{\text{س}}$ مـتـنـاقـصـة تـمـامـاً فـي كـل مـن الـمـجـالـيـن :

$]-\infty$ ، $0[$ وَ $]0$ ، $+\infty[$.

هـا : س $\longmapsto$ س^{2} مـتـنـاقـصـة تـمـامـاً فـي الـمـجـال $]-\infty$ ، $0]$ ومـتـزايـدة تـمـامـاً فـي الـمـجـال $[0$ ، $+\infty[$.

1 – 4 – الـقـيـم الـحـديـة لـدالـة عدديـة :

لـتـكـن تـا دالـة عدديـة مـعرفـة فـي ف (مـجـمـوعـة الـتـعـريـف) ولـيـكـن أ عـنـصـراً مـن ف نـقـول عـن الـدالـة تـا إنـهـا تـبـلـغ :

* قيمة عظمى نسبية عندأ إذا وجد مجال مفتوح ل محتوى في ف ويشمل أ بحيث :

(∀س∈ل) (تا(س)≤ تا (أ)).

*قيمة صغرى نسبية عندأ إذا وجد مجال مفتوح ل محتوى في ف ويشمل أ بحيث :

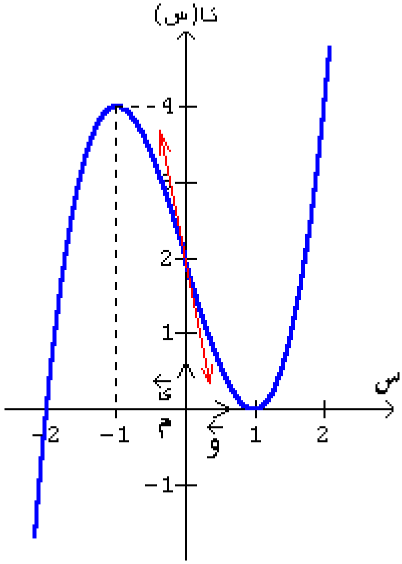
(∀س∈ل) (تا(س)≥ تا(أ)).

*قيمة عظمى مطلقة عند أ إذا كان :

(∀س∈ف) (تا(س)≤ تا (أ)).

*قيمة صغرى مطلقة عند أ إذا كان :

(∀س∈ف) (تا(س)≥ تا (أ)).



أمثلة : تا : س ↤ س^{2} − 3س + 2

تبلغ قيمة عظمى نسبية عند −1 (وهي 4)

وقيمة صغرى نسبية عند +1 (وهي 0)

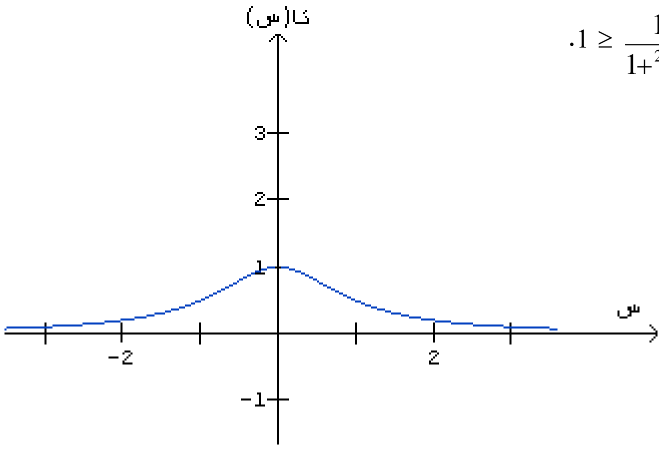
(أنظر الشكل).

تا : س ↤ $\frac{1}{س^{2}+1}$.

تبلغ قيمة عظمى مطلقة عند (0) (وهي +1)

لأن : ∀س ∈ ح : س^{2} + 1 ≥1 .1 ومنه :

∀س ∈ ح : $\frac{1}{س^{2}+1}$ ≤ 1.



2 – النـهـايـات – مـراجـعـة وتـتـمـات :

2 – 1 – اللانـهـايـة والـجـوارات

2 – 1 – 1 – المـسـتـقـيـم الـعـددي الـتـام :

نـسـمـي الـمـسـتـقـيـم الـعـددي الـتام ونرمز له بـالرمز $\overline{ح}$ (ح خط)

اتـحـاد الـمـجـمـوعـة ح ومـجـمـوعـة الـعـنـصـريـن $+\infty$

(زائد مـالا نـهـايـة) وَ $-\infty$ (نـاقـص مـا لا نـهـايـة) الـلـذيـن يـحـقـقـان الـمـتـبـايـنـة : $-\infty <$ س $< +\infty$

لـديـنـا إذن : $\overline{ح} =$ ح $\cup \{ -\infty ، +\infty \}$

مـلاحـظـة : الـعـنـصـران $(-\infty)$ وَ $(+\infty)$ لـيـسـا عـدديـن حـقـيـقـيـيـن وبـالـتـالـي لا يـمـكـن إجـراء الـعـمـلـيـات الـعـاديـة (+ ، – ، × ، ÷) عـلـيـهـمـا.

الـكـتـابـات : $+\infty$ $+\infty$ أو $\infty - \infty$ أو $\infty \times \infty$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ لا تـدل عـلـى أي كـائـن ريـاضـي إلا بـاصـطـلاح مـعـلـن بـه.

2 – 1 – 2 – جـوار عـدد حـقـيـقـي :

نـسـمـي جـواراً لـلـعـدد الـحـقـيـقـي $س_0$ كـل مـجـال يـحـتـوي على مجال مـفـتـوح مـن الـشـكـل :] $س_0 - \alpha$ ، $س_0 + \alpha$ [حـيـث $\alpha > 0$.

المجالات :] 1 ، 3 [،]1.5 ، 2.5 [،] 1.99 ، 2.01 [كلها جوارات لـلـعـدد 2 .

2 – 1 – 3 – الـجـوار (الـمـنـقـط) لـعـدد حـقـيـقـي :

نـسـمـي جـواراً (مـنـطـقـاً) لـلـعـدد الـحـقـيـقـي $س_0$ كـل جـزء من ح من الـشـكـل : ف – $\{س_0\}$

حيث ف هـو جـوار لـلـعـدد $س_0$.

يـمـكـن كـذلـك كـتـابـة هـذا الـجـوار الـمـنـقـط عـلـى الـشـكـل :]أ ، ب [– $\{س_0\}$.

مـثـال :

] -1 ، 0 [$\cup$]0 ، $+1$ [وَ] -0.5 ، 0 [$\cup$] 0 ، 0.5 [جواران منقطان لـلـصـفـر.

2 – 1 – 4 – جـوارات مـا لا نـهـايـة :

نـسـمـي جـواراً مـنـقـطـاً لـ$(+\infty)$

كـل مـجـال مـن الـشـكـل]أ ، $+\infty$ [. ونـسـمـي جـواراً أو جـواراً مـنـقـطـا لـ $(-\infty)$

كـل مـجـال مـن الـشـكـل] $-\infty$ ، ب [حـيـث أ وَ ب عـددان حـقـيـقـيـان كـيـفـيـان

مثال :] +2 ، +∞ [،]−5 ، +∞ [جوران لـ +∞ .
] −∞ ، 0 [،] −∞ ، − 3 [جواران لـ −∞ .

2 − 1 − 5 − مجموعة الجوارات :

نرمز لمجموعة جوارات العنصر أ بالرمز : ج (أ)

ونرمز لمجموعة الجوارات المنقطة للعنصر أ بالرمز : ج * (أ)

أمثلة :] 1 ، 3 [∋ ج(2)] 10 ، +∞ [∋ ج(+∞).

] −0.1 ، 0 [∪]0 ، 0.1 [∋ ج * (0)

2 − 2 − تعاريف النهايات :

2 − 2 −1 − أمثلة :

مثال 1 : لنعتبر الجدول التالي الذي يمثل جزئياً تغيرات الدالة :

تا : س ⟼ س ^{2} (المعرفة من ح إلى ح.)

س	0	1	3	7	10	10^3	10^9.......	$10^{ن}$......
س^2	0	1	9	49	10^2	10^6	10^{18}.....	$10^{2ن}$ ...

يمثل الجدول التغيرات النسبية لِ س وَ س^2 لما يأخذ س قيماً أكبر فأكبر.

بصفة حدسية نشعر أن س^2 سيفوق كل عدد معين مسبقاً (مهما كبُر هذا العدد) إذا أعطينا قيماً كبيرة لِ س بقدر الكفاية.

مثلاً يكفي أن يفوق س العدد 10^3 لكي يفوق س^2 العدد 10^6.

وبصفة أدق مهما كان العدد الموجب ب يمكن إيجاد عدد أ > 0 حيث :

س > أ ⇐ س^2 > ب (في هذا المثال : أ = $\sqrt{ب}$ لأن : س> $\sqrt{ب}$ ⇐ س^2 > ب)

نعبر عن هذه الخاصية للدالة تا بالقول :

تا (س) تؤول إلى (+ ∞) لما س يؤول إلى (+∞).

أو نهاية تا عند (+∞) هي (+∞).

مثال2 :

نعتبر الآن الجدول الموالي الذي يمثل جزئياً تغيرات الدالة ها :

ها : س ⟼ $\frac{1}{س}$ ، في المجال]1 ، +∞ [.

س	1	10	10^{3}	10^{6}	....	10^{100}	....	$10^{ن}$	....
$\frac{1}{س}$	1	0.1	0.001	10^{-6}	....	10^{-100}	....	$10^{-ن}$	...

يأخذ س قيماً موجبة ومتزايدة فإن ها(س) تأخذ قيماً متناقصة أقرب فاقرب للصفر.ونتوقع حدسياً أنه يمكن التحصل على قيم تقرب الصفر على قدر ما نريد. يكفي لذلك أن نعطي لـ س ل قيما كبيرة بقدر كاف. بصفة أدق مهما كان العدد الموجب ي (مهما كان صغره) يمكن إيجاد عدد موجب أ حيث :

$\forall$ س $\in$ ح : س > أ $\Leftarrow$ $\frac{1}{س}$ < ي.

في هذا المثال يكفي أن يكون أ = $\frac{1}{ي}$ لأن :

س > $\frac{1}{ي}$ $\Leftarrow$ $0 <$ $\frac{1}{س}$ < $\frac{1}{ي}$

نقول : إن $\frac{1}{س}$ يؤول (أو ينتهي) إلى 0 لما س يؤول (أو ينتهي) إلى $+\infty$.

ونكتب :

$\underset{س \to +\infty}{نهـا}$ ها(س) = 0 أو $\underset{+\infty}{نهـا}$ ها = 0

مثال 3 : لندرس الآن تغيرات الدالة : تا :س $\longmapsto$ $\sqrt{س}$. في جوار 3.

لأجل ذلك نعتبر الجدول التالي الذي يعطينا من أجل قيم أقرب فأقرب من 3 لِ س القيم المناسبة لِ تا(س) أي لِ$\sqrt{س}$.

س	1	2	2.5	2.99	2.999	3
$\sqrt{س}$	1	1.41…	1.58…	1.729…	1.731…	$\sqrt{3}$ = … 1.73205
$\sqrt{س}$		2	1.87	1.734	1.7323 …	
س	5	4	3.5	3.01	3.0001	3

نلاحظ في هذا الجدول أنه لماس يأخذ قيماً أقرب فأقرب من 3 (سواء أصغر أو أكبر من 3) فإن $\sqrt{س}$ تأخذ قيماً مناسبة أقرب فأقرب من $\sqrt{3}$.

عملياً يمكننا إيجاد قيما لِ $\sqrt{س}$ قريبة من$\sqrt{3}$ بالقدر الذي نريده بشرط أن نأخذ قيماً لِ س قريبة من 3 بالقدر الكافي أو بعبارة أدق يمكننا البرهان على أنه مهما كان العدد الموجبβ يوجد عددα موجب حيث : $|س - 3| < \alpha \Leftarrow |\sqrt{س} - \sqrt{3}| < \beta$.

نعبر عن هذه الخاصية للدالة تا بالقول :

نهاية تا عند 3 هي $\sqrt{3}$ نــهـا$_{3}$ (تا = $\sqrt{3}$)

أو لما س يؤول إلى 3 تا (س) تؤول إلى $\sqrt{3}$(ونكتب : نــهـا$_{س\leftarrow 3}$ تــا(س) $=\sqrt{3}$

2 – 2 – 2 – مصطلحات النهايات :

ليكن أ وَ ل عنصر من $\overline{ح}$ (يعني أن أ∋ ح أو أ = +∞ أو أ = − ∞ وَ ل ∋ ح أو ل = + ∞ أو ل = −∞) وَ تا دالة من ح إلى ح .

إن العبارات التالية متكافئة :

1) تا(س) تؤول (أو تنتهي) إلى ل عندما س تؤول (أو تنتهي) إلى أ.

2) نهاية تا(س) هي ل عندما س ينتهي إلىأ.

3) نهاية تا(س) عندأ هي ل.

4) تا(س) ← ل عندما س ← أ .

5) نــهـا$_{س\leftarrow أ}$ تــا(س)=ل

6) تا(س) ← ل
س← أ

7) نــهـاتـا$_{أ}$ = ل

ملاحظة :

لا يكون لكل هذه العبارات معنى إلا إذا كانت تا معرفة في جوار العنصرأ.

2 – 2 – 3 – تعاريف النهايات :

في كل التعاريف التالية نعتبر أن شرط تعريف الدالة في جوارأ محققاً.

2 – 3 –1 – النهايات الغير منتهية عند مالا نهاية :

* أ = +∞ ، ل = +∞.

نــهـاتـا$_{+\infty}$ = +∞ ⇔ (∀ ع > 0 ، E ص > 0 ، س > ص ⇐ تـا(س) > ع).

* أ = −∞ ، ل = +∞.

نــهـا تـا$_{-\infty}$ = +∞ ⇔ (∀ ع > 0 ،E ص > 0 ، س < ص ⇐ تـا(س) > ع).

* أ = −∞ ، ل = −∞.

نـهـا تـا = −∞ ⟺ (∀ ع < 0 ،E ص < 0 ، س < ص ⟸ تـا(س) < ع).
−∞

* أ = +∞ ، ل = −∞.

نـهـاتـا = −∞ ⟺ (∀ ع < 0 ، E ص > 0 ، س < ص ⟸ تـا(س) < ع).
+∞

2 – 3 – 2 – النـهـايـات غير المـنـتـهية عند عدد حقـيـقي :

* أ ∈ ح ، ل = +∞.

نـهـاتـا = +∞ ⟺ (∀ ع > 0 ، E α > 0 ،|س − أ| < α ⟸ تـا(س) > ع).
أ

* أ ∈ ح ، ل = −∞.

نـهـا تـا = −∞ ⟺ (∀ ع < 0 ، E α > 0 ،|س − أ| < α ⟸ تا(س) < ع).
أ

2 – 3 – 3 – النـهايات المنتـهـيـة عنـد مـا لا نـهـايـة :

* أ = +∞ ، ل∈ ح .

نـهـا تـا = ل ⟺ (∀ β < 0 ، E ص > 0 ، س < ص ⟸ | تـا(س) - ل| < β).
+∞

* أ = −∞ ، ل∈ ح .

نـهـاتـا = ل ⟺ (∀ β > 0 ، E ص < 0 ، س < ص ⟸ | تـا(س) - ل| < β)
−∞

2 – 2 – 3 – 4 – نهاية منـتهية عند عدد حقيقي (أ ∈ ح وَ ل∈ ح)

نـهـاتـا = ل ⟺ (∀ β > 0 ،E α > 0 ، | س − أ | < α ⟸ | تا(س) − ل | < β)
أ

2 – 2 – 3 – 5 – الـنهاية من الـيسار عـند عدد حـقـيـقـي :

لـتكـن الـدالـة تـا الـمـعـرفـة فـي مجال مـن الشكل :]أ − ك ، أ [حـيـث ك > 0

نـقـول أن نـهـايـة تـا عـنـد أ عـلـى الـيـسـار هـي

* + ∞ إذا كـان : (∀ ع > 0 ، E α > 0 ، أ − س < α ⟸ تـا (س) > ع).

(نـكـتـب فـي هـذه الـحـالـة : نـهـاتـا(س) = +∞)
س ⟵ أ

* − ∞ إذا كـان : (∀ ع < 0 ، E α > 0 ، أ − س 〈 α ⟸ تـا(س) < ع)

(نكتب في هذه الحالة : $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ تا(س) = −∞)

*العدد الحقيقي ل إذا كان : $(\forall \beta \rangle 0$ ، $\alpha \quad \langle 0$: أ − س $\langle \alpha \Leftarrow |$ تا(س) − ل $| \langle \beta)$

(نكتب في هذه الحالة : $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ تا(س) = ل)

2 – 2 – 3 – 6 – النهاية من اليمين عند عدد حقيقي :

إذا كانـت الدالـة تا معرفة في مجال من الشكل]أ ، أ + ك [حيث ك> 0 نقول عن نهاية تا عندأ على اليمين هي :

* + ∞ إذا كان :(∀ ع > 0 ، E α > 0 ، س −أ < α ⇐ تا (س) > ع).

(نكتب في هذه الحالة : $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ تا(س) = +∞)

* − ∞ إذا كان : (∀ ع > 0 ، E α > 0 ، س − أ < α ⇐ تا(س) < ع).

(نكتب في هذه الحالة : $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ تا(س) = −∞)

* العدد ل إذا كان :(∀β > 0 ، E α > 0 ، س −أ < α ⇐ | تا(س) − ل| < β)

(نكتب في هذه الحالة : $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ تا(س) = ل).

2 – 2 – 3 – 7 – أمثلة :

أ) تـا : ح ← ح ، س ↦ $\frac{1}{س}$ $\begin{cases} \underset{0^+}{\text{نهـا}} \text{ تـا } = +\infty \\ \underset{0^-}{\text{نهـا}} \text{ تـا } = -\infty \end{cases}$

ب) هـا : ح ← ح ، س ↦ $\frac{س + 1}{س - 1}$ $\begin{cases} \underset{1^+}{\text{نهـا}} \text{ تـا } = +\infty \\ \underset{1^-}{\text{نهـا}} \text{ تـا } = -\infty \end{cases}$

جـ) عـا : ح ← ح ، س ↦ $\sqrt{س - 3}$ $\underset{3^+}{\text{نهـا}}$ عـا = 0 $\underset{3^-}{\text{نهـا}}$ عـا غير موجودة لأن الدالة عا غير معرفة على يسار 3 (يعني من أجل قيم س الأصغر من 3).

2 – 2 – 3 – 8 – ملاحظات عامة حول النهايات :

يمكن وجود نهاية الدالة عند أ (أ ∌ ح) بدون أن تكون الدالة معرفة في أ لكن من الضروري أن تكون معرفة " حول" أ يعني في مجال منقط من الشكل]أ – ك ، أ[∪]أ ، أ + ك[(حيث ك> 0).

* النهاية لا تتعلق بمتغير إنما هي قيمة ثابتة.

* البرنامج الرسمي ينص على تقبل معظم النتائج المتعلقة بالنهايات بدون برهان.

2 – 3 – خصائص النهايات :

2 – 3 –1 –النهايات والترتيب :

2 –3 –1 – 1 – نظرية :

إذا كانت دالة تأخذ قيمها في ح$_+$ فإن كل نهاية لها تكون موجبة أو معدومة.

أي إذا كانت الدالة تا معرفة في ف وَ كان أ ∌ ف فإن :

$$\left.\begin{array}{l} \forall س \in ف: \quad تا(س) \geq 0 \\ \underset{أ}{نها} \; تا = ل \end{array}\right\} \Leftarrow ل \geq 0$$

2 – 3 – 1 – 2 – نظرية :

إذا كانت تا وَ ها دالتين نقبل كل واحدة منهما نهاية عند أ (أ ∌ $\overline{ح}$) وإذا كانتا تحققان في جوار لِ أ العلاقة تا(س) ≥ ها(س) فإن : $\underset{أ}{نها}$ تا ≥ $\underset{أ}{نها}$ ها.

2 – 3 – 1 – 3 – نظرية :

إذا كانت تا وَ ها دالتين معرفتين في جوار منقط لِ أ (أ ∌ $\overline{ح}$) حيث تحققان العلاقة :
تا(س)≥ ها(س) وإذا كانت
$\underset{أ}{نها}$ تا = + ∞ فإن $\underset{أ}{نها}$ ها= +∞.

2 – 3 – 1 – 4 – نظرية :

إذا كانت تا وَ ها دالتين معرفتين في جوار منقط لِ أ (أ ∌ $\overline{ح}$) حيث تحققان العلاقة : تا(س)≥ ها(س) وإذا كانت $\underset{أ}{نها}$ ها = – ∞ فإن $\underset{أ}{نها}$تا= –∞.

2 – 3 – 1 – 5 – نظرية :

إذا كانت تا، ها، عا ثلاث دوال تحقق في جوار منقط لِ أ (أ ∋ $\overline{ح}$) العلاقة : تا(س)≤ ها(س) ≤ عا(س) وإذا كانت

نهـا تا = نهـا عا = ل فإن نهـا ها= ل.

مثال : في] 0 ، + ∞ [لدينا : $-\frac{1}{س} \leq \frac{جب\ س}{س} \leq \frac{1}{س}$.

ونعلم أن $\underset{س \leftarrow +\infty}{نهـا} \frac{1}{س} = \underset{س \leftarrow +\infty}{نهـا} - \frac{1}{س} = 0$

ومنه $\underset{س \leftarrow +\infty}{نهـا} \frac{جب\ س}{س} = 0$ (بتطبيق النظرية : 2 – 3 1 – 5)

2 – 3 – 2 النهايات والعمليات :

2 – 3 – 2 – 1 – نظرية :

إذا كانت تا دالة عددية تقبل نهاية عند أ (أ∋ ح)أو+ ∞ أو – ∞ وَ ك دالة عددية ثابتة قيمتها ك (للتبسيط). وكانλ عدداً حقيقيا غير معدوم فإن : نهايات الدوال : تا+ ك ، λ تا ، | تا| ، $\frac{1}{تا}$

وَ $\sqrt{تا}$ إذا وجدت هي حسب الجدول التالي :

نهـا تا	نهـا (تا+ك)	نهـا λتا	نهـا |تا|	نهـا $\frac{1}{تا}$	نهـا $\sqrt{تا}$
ل(ل ∋ ح *)	ل + ك	λ . ل	|ل |	$\frac{1}{ل}$	$\sqrt{ل}$ إذا كان ل ≥0
0^+	ك	0	0	+ ∞	0
0^-	ك	0	0	– ∞	لا توجد
+ ∞	+ ∞	± ∞ حسب إشارة λ	+ ∞	0	+ ∞
– ∞	– ∞	± ∞ حسب إشارة λ	+ ∞	0	لا توجد

***ملاحظات :**

1 – لا توجد نهـا أ $\sqrt{\text{تا}}$ إلا إذا كانت تا تأخذ قيما موجبة في جوار أ.

2 – نهـا أ تا = 0^+ معناه نهـا أ تا = 0 مع تا(س) ≥ 0 في جوار أ

3 – نهـا أ λ.تا = ∞ معناه نهـا أ λ .تا = +∞ أو نهـا أ λ.تا = −∞ حسب إشارة λ

4 – الجدول يعطينا التكافؤ : نهـا أ | تا| = 0 ⇔ نهـا أ تا = 0

2 – 3 – 2 –2 – نظرية :

إذا كانت تا وَ ها دالتين عدديتين تقبل كل منهما نهاية عند أ أو +∞ أو −∞ فإن نهايات الدوال (تا + ها) ، تا . ها وَ $\frac{\text{تا}}{\text{ها}}$ إذا وجدت هي حسب الجدول التالي :

نهـا أ تا	نهـا أ ها	نهـا أ (تا+ها)	نهـا أ (تا.ها)	نهـا أ $\frac{\text{تا}}{\text{ها}}$
ل(ل ∈ ح *)	م (م ∈ ح *)	ل + م	ل . م	$\frac{\text{ل}}{\text{م}}$
ل	0	ل	0	± ∞
0	م	م	0	0
0	0	0	0	؟
ل	+ ∞	+ ∞	± ∞	0
− ∞	م	− ∞	± ∞	± ∞
0	+ ∞	+ ∞	؟	0
− ∞	0	− ∞	؟	± ∞
+ ∞	+ ∞	+ ∞	− ∞	؟
+ ∞	− ∞	؟	− ∞	؟
− ∞	− ∞	− ∞	+ ∞	؟

ملاحظات :

1 – الرمز ± ∞ يحل محل + ∞ أو − ∞ . تُعيّن الإشارة (+ أو −) حسب إشارتي تا (س) وَ ها(س) في جوار أ وبتطبيق قاعدة الإشارات.

2 – الرمز ؟ يعني أنه لا يمكن في هذه الحالة تعيين النهاية مباشرة. هذه الحالات تتمثل في الإشكال : "$\frac{0}{0}$ ، 0 × ∞، وَ +∞ −∞ " (يعني (+∞)+ (−∞) أو(−∞) +(−∞) أو(+∞)−(+∞)

($+\infty$)). هـذه الـحـالات تـدعـى حـالات عدم الـتـعـيين الـتـي نـتـخـلـص مـنـهـا عـادة بـتـحـويـل شـكـل الـعـبـارات الـمـعـنـيـة وتـبـسـيـطـهـا. (سـنـرى أمـثـلـة تـعـالـج فـيـهـا هـذه الـحـالات).

3 – تـطـبـيـق الـنـظـريـة فـي حـالـتـي مـجـمـوع وجـداء دالـتـيـن يُـعـمّـم بـسـهـولـة إلـى حـالـتـي مـجـمـوع أو جـداء عـدّة دوال إعـتـمـادًا عـلـى تـجـمـيـعـيـة عـمـلـيـتـي جـمـع وضـرب الـدوال الـعـدديـة. يـعـنـي أنـه إذا كـانـت لـديـنـا ن دالـة تـا$_1$ ، تـا$_2$ ، تـا$_3$ ، . . . . . . ، تـا$_ن$ بـحـيـث :

$\forall$ د $\in$ ط ، 1 $\leq$ د $\leq$ ن : نـهـا$_{أ}$ تـا$_د$ = ل$_د$

نـهـا$_{أ}$ (تـا$_1$ + تـا$_2$ + تـا$_3$ + ... + تـا$_ن$) = ل$_1$ + ل$_2$ + ل$_3$ + ... ل$_ن$.

وَ

نـهـا$_{أ}$ (تـا$_1$ × تـا$_2$ × تـا$_3$ × . . . × تـا$_ن$) = ل$_1$ × ل$_2$ × ل$_3$ × . . . . ل$_ن$

2 – 3 – 3 – نـهـايـة دالـة مـركـبـة :

نـظـريـة :

إذا كـانـت عـا دالـة عـدديـة مـركـبـة بـحـيـث عـا = هـا o تـا وإذا كـان :

نـهـا$_{أ}$ تـا = ل وَ نـهـا$_{ل}$ هـا = م فـإن نـهـا$_{أ}$ (هـا o تـا) = م.

بعبارة أخرى : (نـهـا$_{س\leftarrow أ}$ تا(س) = ل وَ نـهـا$_{ع\leftarrow ل}$ ها (ع) = م) $\Leftarrow$ نـهـا$_{س\leftarrow أ}$ ها[تا(س)] = م

2 – 3 – 4 – أمـثـلـة :

مـثـال 1 :

نها س	نها 3 س	نها 3 س + 5	نها $\lvert 3س+5 \rvert$	نها $\frac{1}{3س+5}$
2	6	$6 + 5 = 11$	$+11$	$\frac{1}{11}$
$(-\frac{5}{3})^{+}$	$(-5)^{+}$	0^{+}	0^{+}	$+\infty$
$(-\frac{5}{3})^{-}$	$(-5)^{-}$	0^{-}	0^{+}	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0

مثـال 2 :

نـهـا س	3	1	+ ∞
* نـهـا $س^2$	9	1	+ ∞
* نـهـا $(س - 1)^2$	4	0	+ ∞
* نـهـا $(س^2 - 1)$	8	0	+ ∞
* نها$(س-1)^2 \times (س^2 - 1)$	32	0	∞+
* نـهـا $\left(\frac{(س-1)^2}{س^2-1}\right)$	$\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$	؟	؟

النـهـايـة $\underset{1}{\text{نـهـا}} \frac{(س-1)^2}{س^2-1}$ من حـالات عدم الـتـعـيين، يـكـفـي أن نـحـلـل ونـخـتـزل فـي جـوار منـقـط لـِ 1 الـعـبـارة :

$$\left(\frac{(س-1)^2}{س^2-1}\right)=\frac{(س-1)(س-1)}{(س-1)(س+1)}=\frac{س-1}{س+1}$$ (لأن الـجـوار الـمـنـقـط لا يـحـتـوي عـلـى 1).

ومـنـه : $\underset{1}{\text{نـهـا}} \left(\frac{(س-1)^2}{س^2-1}\right) = \underset{1}{\text{نـهـا}} \left(\frac{س - 1}{س + 1}\right) = \left(\frac{0}{2}\right) = 0$

مثـال 3 :

تـا(س) = جـب س ، هـا (س) = $\left(\frac{1}{س}\right)$ هـا [تـا(س)] = $\left(\frac{1}{جب\ س}\right)$

$\underset{\pi^-}{\text{نـهـا}}$ (جـب س) = 0^+ (لأن فـي] $\frac{\pi}{2}$ ، π [: جـب س > 0).

$\underset{ع \to 0^+}{\text{نـهـا}} \frac{1}{ع} = +\infty.$

ومـنـه $\underset{\pi^-}{\text{نـهـا}} \frac{1}{جب\ س} = +\infty.$

2 – 4 – نـهـايـات بـعض الـدوال الـمـألـوفـة :

2 – 4 – 1 – الـقـوة الـنـونـيـة : تـا: س⟼$س^ن$ (ن ∍ ط*)

الـنـهـايـات فـي الـحـالات الـمـخـتـلـفـة مـلـخـصـة فـي الـجـدول الـتـالـي :

	أ ∋ ح	+ ∞	− ∞
ن زوجي	$أ^ن$	+ ∞	+ ∞
ن فردي	$أ^ن$	+ ∞	− ∞

2 – 4 – 2 – وحيدات الحد : س⟼ ك $س^ن$ (ك ∋ ح*، ن ∋ ط *).

نهايات وحيدات الحد تتمثل في الحالات الملخصة في الجدول الآتي :

الحالات	مثال	النهايات عند		
		أ	+ ∞	− ∞
ك > 0 ، ن زوجي	3 $س^4$	3 $أ^4$	+ ∞	+ ∞
ك < 0 ، ن زوجي	− 3 $س^4$	− 3 $أ^4$	− ∞	− ∞
ك > 0 ، ن فردي	5 $س^3$	5 $أ^3$	+ ∞	− ∞
ك < 0 ، ن فردي	− 5 $س^3$	− 5 $أ^3$	− ∞	+ ∞

2 – 4 – 3 – نهايات كثيرات الحدود :

ليكن كثير الحدود من الدرجة ن المعرف كما يلي :

∀ س ∋ ح ، ك (س) = $أ_ن$ $س^ن$ + $أ_{ن-1}$ $س^{ن-1}$ + . . . + $أ_1$ س + $أ_0$.مع $أ_ن$ $\neq 0$.

ك (س) هو مجموع وحيدات حد، نتحصل إذن على نهايات ك باستعمال النتائج التي سبقت حول نهايات وحيد الحد ونهايات مجموع دوال.

2 – 4 – 3 – 1 –نهاية كثير حدود عند عدد حقيقي ط :

حسب ما سبق لدينا : ∀ ر ، 1 ≤ ر≤ ن ، $\underset{س \to ط}{نها}$ $أ_ر$ $س^ر$ = $أ_ر$ $ط^ر$.

ومنه $\underset{س \to ط}{نها}$ ك (س) = $أ_ن$ $ط^ن$ $أ_{ن-1}$ $ط^{ن-1}$ + . . . + $أ_1$ ط + $أ_0$ = ك(ط).

نظرية :

مهما كان كثير الحدود ك ومهما كان العدد الحقيقي ط : $\underset{س \to ط}{نها}$ ك (س) = ك (ط)

حالة خاصة :

$\underset{0}{نها}$ ك = ك (0) = $أ_0$ (كل الحدود الأخرى تنعدم)

2 – 4 – 3 – 2 نهاية كثير حدود عند ما لا نهاية :

ليكن : ك(س) = $أ_ن س^ن + أ_{ن-1} س^{ن-1} + \ldots + أ_1 س + أ_0$ / $أ_0 \neq 0$.

لدينا من أجل كل عدد س غير معدوم :

$$ك(س) = أ_ن س^ن \left(1 + \frac{أ_{ن-1}}{أ_ن س} + \frac{أ_{ن-2}}{أ_ن س^2} + \ldots + \frac{أ_1}{أ س^{ن-1}} + \frac{أ_0}{أ_ن س^ن} \right)$$

ك(س) = $أ_ن س^ن$. ها(س) . لما س ⟵ +∞ كل الحدود :

$$\frac{أ_{ن-1}}{أ_ن س} ، \frac{أ_{ن-2}}{أ_ن س^2} ، \frac{أ_{ن-3}}{أ_ن س^2} ، \ldots ، \frac{أ_1}{أ_ن س^{ن-1}} ، \frac{أ_0}{أ_ن س^ن}$$ تنتهي إلى الصفر

ويبقى الحد الأول الثابت 1 ومنه :

$\lim_{س \to +\infty}$ ها(س) = 1 لكن $\lim_{|س| \to +\infty} أ_ن س^ن = +\infty$ أو $\lim_{|س| \to +\infty} أ_ن س^ن = -\infty$

حسب الجدول في(1 -3 – 2 -2) $\lim_{س \to +\infty} أ_ن س^ن$. ها(س) هي $\lim_{س \to +\infty} أ_ن س^ن$ يعني

$\lim_{س \to +\infty}$ ك (س) = $\lim_{س \to +\infty} أ_ن س^ن$ ومنه :

نظرية :

عند +∞ أو −∞ نهاية كثير حدود هي نهاية حده ذي الدرجة الأكبر.

مثال : ك (س) = $-3 س^5 + 4 س^2 - 7 س + 2$

$\lim_{س \to +\infty}$ ك (س) = $\lim_{س \to +\infty} - 3 س^5 = -\infty$ و $\lim_{س \to -\infty}$ ك (س) = +∞

2 – 4 – 4 – نهايات الدوال الكسرية :

لتكن تا : ح ⟵ ح دالة معرّفة كما يلي :

$$تا(س) = \frac{ب(س)}{م(س)} = \frac{أ_ن س^ن + أ_{ن-1} س^{ن-1} + \ldots + أ_1 س + أ_0}{جـ_ر س^ر + جـ_{ر-1} س^{ر-1} + \ldots + جـ_1 س + جـ_0}$$

مع $أ_ن \neq 0$ وَ $جـ_ر \neq 0$ ، ن ≥ 1 وَ ر ≥ 1.

2 – 4 -4 -1 نهاية دالة كسرية عند عدد حقيقي ط :

* إذا كـان : م (ط)$\neq$ 0 فـإن : $\underset{ط}{\text{نـهـا}}$ تـا = $\dfrac{\underset{ط}{\text{نـهـا}}\ ب}{\underset{ط}{\text{نـهـا}}\ م}$ = $\dfrac{ب(ط)}{م(ط)}$ = تـا(ط)

* إذا كـان م (ط) = 0 وَ ب (ط)$\neq$ 0

نـدرس إشــارة م(س) فــي جوار ط. إذا كـان م(س) يـنـعـدم عـنـد ط بـدون أن يـغـيـر إشـارتـه تـوجـد نـهـايـة لـ تـا غـيـر مـنـتـهـيـة وإشـارة هـذه الـنـهـايـة هـي إشـارة تـا(س) في جوار ط. أما إذا كانت تتغير إشارة م(س) عند ط فتوجد نـهايتان مختلفتان من اليمين ومن اليسار غير منتهيتين.

*إذا كـان م(ط) = 0 وَ ب (ط) = 0

* فــي هـذه الـحـالـة كـثـيـرا الـحـدود ب (س) وَ م(س) يـقـبـلان القسمة على (س − ط) أو على قوة لِـ (س − ط) بعد الإختـزال عـلـى أكـبـر قـوة مـمـكـنـة نـرجـع إلـى إحـدى الـحـالات الـسـابـقـة.

2 − 4 − 4 − 2 − الـنـهـايـات عـنـد مـالا نـهـايـة :

بإتـبـاع نـفـس الطريـقـة التـي سبق تـطـبـيقها لكـثـيـرات الـحـدود نـجـد :

$$تا(س) = \frac{ب(س)}{م(س)} = \frac{أ_ن س^ن\left(1 + \dfrac{أ_{ن-1}}{أ_ن س} + \dfrac{أ_{ن-2}}{أ_ن س^2} + \dots + \dfrac{أ_1}{أ_ن س^{ن-1}} + \dfrac{أ_0}{أ_ن س^ن}\right)}{جـ_ر س^ر\left(1 + \dfrac{جـ_{ر-1}}{جـ_ر س} + \dfrac{جـ_{ر-2}}{جـ_ر س^2} + \dots + \dfrac{جـ_1}{جـ_ر س^{د-1}} + \dfrac{جـ_0}{جـ_ر س^د}\right)}$$

تـا(س) = $\dfrac{أ_ن س^ن}{جـ_ر س^ر}$. هـا(س) مـع الـعـلـم أن $\underset{س \to +\infty}{\text{نـهـا}}$ هـا(س) = 1.

وكـمـا وضـحـنـا سـابـقـاً نـسـتـنـتـج أن :

$$\underset{س \to +\infty}{\text{نـهـا}}\ تـا(س) = \underset{س \to +\infty}{\text{نـهـا}}\ \frac{أ_ن س^ن}{جـ_ر س^ر}.$$

و $$\underset{س \to -\infty}{\text{نـهـا}}\ تـا(س) = \underset{س \to -\infty}{\text{نـهـا}}\ \frac{أ_ن س^ن}{جـ_ر س^ر}.$$

نـظـريـة :

نـهـايـة دالـة كـسـريـة عـنـد +∞ أو −∞ هـي نـهـايـة نـسـبـة الـحـد الأكـبـر درجـة بـالـبـسـط إلـى الـحـد الأكـبـر درجـة بـالـمـقـام.

2 − 4 − 4 − 3 − أمـثـلـة :

أحـسـب نـهـايـات الـدوال الـتـالـيـة عـنـد / 3 ، 1 ، +∞ ، − ∞

مثال 1 :

$$\text{تا(س)} = \frac{5\text{س}^2+2}{(\text{س} - 1)^2} = \frac{\text{ب(س)}}{\text{م(س)}}.$$

م(3) = $(3 - 1)^2 = 2^2 = 4$. إذن $\underset{3}{\text{نها}}\ \text{تا} = \text{تا}(3) = \frac{5.3^2+2}{4} = \frac{47}{4}$.

* م(1) = 0 وَ ب(1) = $5.1^2 + 2 = 7$.

و $\forall$ س$\in$ ح $(\text{س} - 1)^2 \geq 0$.ب(س)$\rightarrow 7$ و م(س)$\rightarrow 0^+$. إذن $\underset{1}{\text{نها}}\ \text{تا(س)} = +\infty$

* $\underset{+\infty}{\text{نها}}\ \text{تا} = \underset{\text{س}\rightarrow+\infty}{\text{نها}} \frac{5\text{س}^2}{\text{س}^2} = +5$ ، $\underset{\text{س}\rightarrow-\infty}{\text{نها}}\ \text{تا} = \underset{\text{س}\rightarrow+\infty}{\text{نها}} \frac{5\text{س}^2}{\text{س}^2} = +5$

مثال 2 : $\text{تا(س)} = \frac{3\text{س}^3 - 2\text{س}+4}{\text{س}^2 - 1} = \frac{\text{ب(س)}}{\text{م(س)}}.$

* م(3) = $3^2 - 1 = 8$ إذن $\underset{3}{\text{نها}}\ \text{تا} = \text{تا}(3) = \frac{3(3)^3 - 2(3)+4}{8} = \frac{79}{8}$.

* م(1) = 0 وَ ب(1) = 5 والإشارة حسب الجدول التالي :

س		-1		$+1$	
$\text{س}^2 - 1$	+	0	−	0	+

يعني أن $(\text{س}^2 - 1)$ ينعدم ويغير إشارته عند +1. توجد إذن نهاية من اليسار ونهاية من اليمين هي :

$\underset{1^+}{\text{نها}}\ \text{م} = 0+$ و $\underset{1^-}{\text{نها}}\ \text{م} = 0^-$ وباعتبار $\underset{1}{\text{نها}}\ \text{ب} = 5$

نستنتج أن : $\underset{1^+}{\text{نها}}\ \text{تا} = +\infty$ وَ $\underset{1^-}{\text{نها}}\ \text{تا} = -\infty$

$$\underset{\text{س}\rightarrow+\infty}{\text{نها}}\ \text{تا(س)} = \underset{\text{س}\rightarrow+\infty}{\text{نها}} \frac{3\text{س}^3}{\text{س}^2} = \underset{\text{س}\rightarrow+\infty}{\text{نها}}\ 3\text{س} = +\infty$$

$$\underset{\text{س}\rightarrow-\infty}{\text{نها}}\ \text{تا} = \underset{\text{س}\rightarrow-\infty}{\text{نها}}\ 3\text{س} = -\infty.$$

مثال 3 : $\underset{\text{س}\rightarrow 2}{\text{نها}} \frac{\text{س}^3 - 8}{\text{س}^2 - 4}$. (هذه النهاية هي حالة عدم التعيين لأن $2^3 - 8 = 0$ وَ $2^2 - 4 = 0$).

إزالة عدم التعيين :

من أجل س$\in$ ح $- \{2\}$

لدينا : $\dfrac{\text{س}^3 - 8}{\text{س}^2 - 4} = \dfrac{(\text{س} - 2)(\text{س}^2 + 2\text{س} + 4)}{(\text{س} - 2)(\text{س} + 2)} = \dfrac{\text{س}^2 + 2\text{س} + 4}{\text{س} + 2}$.

ومنه $\underset{\text{س} \to 2}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^3 - 8}{\text{س}^2 - 4} = \underset{\text{س} \to 2}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^2 + 2\text{س} + 4}{\text{س} + 2} = \dfrac{12}{4} = 3$.

2 – 4 – 5 – نهايات الدوال المثلثية :

2– 4 – 5 – 1 – نهايات الجيب، التجيب والظل عند الصفر :

* $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \ \text{جب س}$

بإعتبار الدائرة المثلثية وتعريف الجيب نستنتج العلاقة :

$\forall \ \text{س} \in \left] -\dfrac{\pi}{2} \ \text{،} \ +\dfrac{\pi}{2} \right[: 0 \leq |\text{جب س}| \leq |\text{س}|$.

$\underset{0}{\text{نها}} \ 0 \leq \underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \ |\text{جب س}| \leq \underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \ |\text{س}|$.

وبالتالي : $0 \leq \underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \ |\text{جب س}| \leq 0$.

أي $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \ |\text{جب س}| = 0$ وهذا يعني : $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \ \text{جب س} = 0$.

$$\boxed{\text{إذن :} \quad \underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \ \text{جب س} = 0}$$

* $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \ \text{تجب س}$

بإعتبار أن في $\left[0 \ \text{،} \ +\dfrac{\pi}{2} \right[$: $\text{تجب س} = \sqrt{1 - \text{جب}^2\text{س}}$.

وأن تجب دالة زوجية ينتج أن :

$\forall \ \text{س} \in \left] -\dfrac{\pi}{2} \ \text{،} \ +\dfrac{\pi}{2} \right[: \text{تجب س} = \sqrt{1 - \text{جب}^2\text{س}}$

إذن $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \ \text{تجب س} = \underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \sqrt{1 - \text{جب}^2\text{س}} = \sqrt{1} = 1$.

$$\boxed{\text{إذن :} \quad \underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \ \text{تجب س} = 1}$$

* $\underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \ \text{ظل س}$

$\forall \ \text{س} \in \left] -\dfrac{\pi}{2} \ \text{،} \ +\dfrac{\pi}{2} \right[: \text{ظل س} = \dfrac{\text{جب س}}{\text{تجب س}}$

وبما أن $\underset{س \to 0}{\text{نـهـا}}$ جب س = 0 وَ $\underset{س \to 0}{\text{نـهـا}}$ جب س = 1 تكون $\underset{س \to 0}{\text{نـهـا}}$ ظل س = $\frac{0}{1}$ =0

إذن : $\underset{س \to 0}{\text{نـهـا}}$ ظل س =0

2-4 -5 -2 نهايات الجيب، التجيب، الظل والتظل عند عدد حقيقي ط :

* الجيب معرف في ح ولدينا :

جب س − جب ط = $\frac{1}{2}$ جب $\frac{س - ط}{2}$. تجب $\frac{س + ط}{2}$

لما س ← ط : $\frac{س - ط}{2}$ ← 0 و $\frac{س + ط}{2}$ ← ط

إذن :

$\underset{س \to 0}{\text{نـهـا}}$ جب س=جب ط + $\underset{س \to 0}{\text{نـهـا}}$ ($\frac{1}{2}$ جب $\frac{س - ط}{2}$. تجب $\frac{س + ط}{2}$) =جب ط+ $\frac{1}{2}$ .0. 1

= جب ط.

إذن $\underset{س \to ط}{\text{نـهـا}}$ جب س = جب ط أي : ∀ ط ∍ ح : $\underset{س \to ط}{\text{نـهـا}}$ جب س = جب ط

* ∀ س ∍ ح : تجب س = جب (س + $\frac{\pi}{2}$)

لما س ← ط : س + $\frac{\pi}{2}$ ← ط + $\frac{\pi}{2}$. وَ جب (س + $\frac{\pi}{2}$) ← جب(ط+ $\frac{\pi}{2}$) = تجب ط

إذن ∀ ط ∍ ح $\underset{س \to ط}{\text{نـهـا}}$ تجب س = تجب ط

*نستنتج مباشرة مما سبق أن :

∀ ط ∍ ح وَ ط ≠ $\frac{\pi}{2}$ + ك π : $\underset{س \to ط}{\text{نـهـا}}$ ظل س = ظل ط (ك ∍ ص).

∀ ط ∍ ح وَ ط ≠ ك π : $\underset{س \to ط}{\text{نـهـا}}$ تظل س = تظل ط.

2 - 4 - 5 - 3 - نـهـايـة $\frac{جب س}{س}$ عند الصفر :

من المتباينة الأساسية :

$\forall$ س $\in$] $-\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$ [: |جب س| $\leq$ |س| $\leq$ |ظل س|.

نستنتج بقسمة الأطراف الثلاثة على |جب س| في] $-\frac{\pi}{2}$ ، 0 [$\cup$] 0 ، $+\frac{\pi}{2}$ [

$1 \leq \frac{|س|}{|جب س|} \leq \frac{1}{|تجب س|}$ لما س $\leftarrow$ 0 : تجب س $\leftarrow$ 1

إذن $\lim_{س \leftarrow 0} \left| \frac{|س|}{|جب س|} \right| = +1$ (حسب النظرية 2 – 3 – 1 – 5).

لكن : $\forall$ س $\in$] $-\frac{\pi}{2}$ ، 0 [$\cup$] 0 ، $\frac{\pi}{2}$ [$\frac{س}{جب س} > 0$ لأن س و جب س لهما نفس الإشارة في المجال المنقط السابق.

ومنه $\left|\frac{س}{جب س}\right| = \frac{س}{جب س}$.

أي أن $\lim_{س \leftarrow 0} \frac{س}{جب س} = +1$ ومنه $\lim_{س \leftarrow 0} \frac{جب س}{س} = \frac{1}{\lim_{س \leftarrow 0} \frac{س}{جب س}} = \frac{1}{1} = 1$

$$\boxed{\text{إذن } \lim_{س \leftarrow 0} \frac{جب س}{س} = +1}$$

2 – 4 – 5 – 4 – نهايات أخرى

* $\lim_{س \leftarrow 0} \frac{ظل س}{س} = \lim_{س \leftarrow 0} \frac{جب س}{س} . \frac{1}{تجب س} = 1.1 = +1$.

$\lim_{س \leftarrow 0} \frac{1 - تجب س}{س^2}$. (عدم تعيين لأن 1 – تجب س $\leftarrow$ 0 و $س^2 \leftarrow 0$ من أجل س $\leftarrow 0$)

لنضع س = 2 ط فيكون : تجب س = تجب 2 ط = 1 – 2 $جب^2$ط

أي :1 – تجب س =1 – $تجب^2$ ط =1 – (1 – 2 $جب^2$ط) = 2$جب^2$ط.

$س^2$ =(2 ط) ^{2} = 4 $ط^2$.

لما س$\leftarrow$0 ، 2ط$\leftarrow$0 أي ط$\leftarrow$0

إذن $\lim_{س \leftarrow 0} \frac{1 - تجب س}{س^2} = \lim_{ط \leftarrow 0} \frac{2\, جب^2 ط}{4 ط^2} = \lim_{ط \leftarrow 0} \frac{جب^2 ط}{2 ط^2}$

$$= \underset{\text{ط} \leftarrow 0}{\text{نـهـا}} \left(\frac{\text{جبط}}{\text{ط}}\right)^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (\text{لأن} \quad \underset{\text{ط} \leftarrow 0}{\text{نـهـا}} \frac{\text{جبط}}{\text{ط}} = 1)$$

$$\boxed{\text{إذن :} \quad \underset{\text{س} \leftarrow 0}{\text{نـهـا}} \frac{1 - \text{تـجـبس}}{\text{س}^2} = \frac{1}{2} .}$$

3 – الـدوال الـعدديـة الـمسـتـمـرة :

3 – 1 – تـعـاريـف :

3 – 1 – 1 – الـدالـة الـمـسـتـمـرة فـي نـقـطـة :

نـقـول عن الـدالـة الـعـدديـة تـا أنـهـا مـسـتـمـرة عـنـد الـنـقـطـة ﺃ (ﺃ ∋ ح) إذا وفـقـط إذا كـان :

* تـا مـعـرفـة فـي جـوار لِـ ﺃ يـعـنـي فـي مـجـال مـن الـشـكـل :] ﺃ – ل ، ﺃ + ل [

وَ

* $\underset{\text{ﺃ}}{\text{نـهـاتـا}} = \text{تـا(ﺃ)}$

أمـثـلـة :

* تـا : س ⟵ س ^{2} . معـرفة عـلـى المجال ح ومن أجل كل عدد حـقـيـقـي ﺃ لـديـنـا $\underset{\text{ﺃ}}{\text{نـهـاتـا}} =$ ﺃ^2. (أرجـع إلى الـنظريات حـول الـنـهـايـات).

ولـهـذا نـقـول إن تـا مـسـتـمـرة فـي كـل نـقـطـةﺃ مـن ح .

*هـا : ح ⟵ ح

س ⟵ $\frac{1}{\text{س}}$ معرفة في أي نقطة ﺃ من المجالين ح^*_+ وَ ح^*_- مهما كانﺃ في ح^*_+ لدينا : $\underset{\text{ﺃ}}{\text{نـهـاتـا}} = \frac{1}{\text{ﺃ}}$.

نقول أن الدالة ها مستمرة في أي نقطـة مـن الـمـجـالـيـن ح^*_+ أو ح^*_- .

لكن ها ليست مستمرة عند " الـنـقـطـة 0 " لأنها ليست معرفة عند الـصـفـر .

3 – 1 – 2 – حـالات عـدم الإسـتـمـرار :

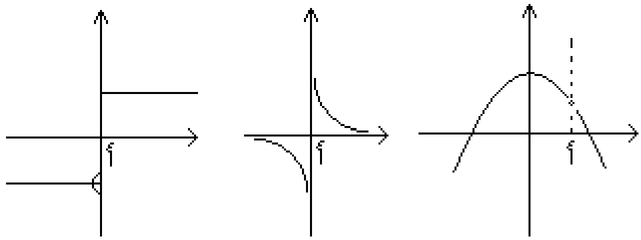
3 – 1 – 2 – 1 – الـدالـة غـيـر مـعـرفـة عـنـد الـنـقـطـة ﺃ

أمـثـلـة :

تـا : س $\mapsto \frac{1}{س}$ عنـد 0

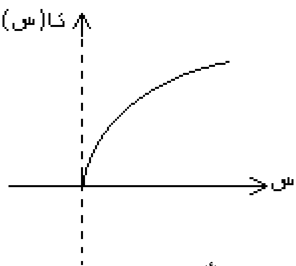
هـا : س $\mapsto \frac{س+3}{س-2}$ عنـد 2.

ظل : س $\mapsto$ **ظـل** س عنـد $\frac{\pi}{2}$



تـا غيـر مـعـرفـة عنـد أ

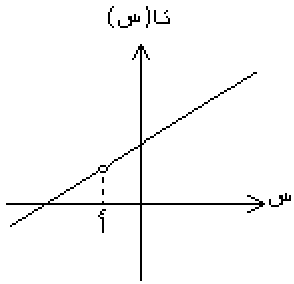
3 – 1 – 2 – 2 – الدالـة تا غيـر معرفـة في جوار أ :



مـثـال : تـا : س $\mapsto \sqrt{س}$ المـعـرفـة فـي 0 ولـكـن لـيسـت مـعـرفـة عـلـى مـجـال الـشـكـل] $-\alpha$ ، $+\alpha$ [وعـلـيـه فـإنـهـا ليست مـسـتـمرة عند الـصـفـر.

" $\sqrt{\ }$ " غير معـرفـة في] $-\infty$ ، 0 [.

3 – 1 – 2 – 3 – الدالـة معرفـة في جوار أ لـكن : نـهـا$_{أ}$تـا ≠ تـا (أ) :



تـا(أ) = 0 وَ نـهـا$_{أ}$ تـا ≠ 0

مثال :

$$\text{تا}: \text{س} \longmapsto \text{تا(س)} = \begin{cases} \text{س} + 1 & \text{إذا كان س} \neq -1 \\ 0 & \text{إذا كان س} = -1 \end{cases}$$

3 – 1 – 2 – 4 – لا توجد نهاية لِ تا عند أ :

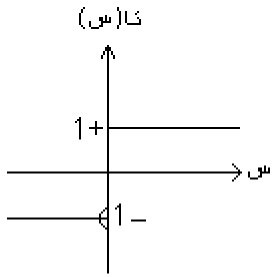
مثال :

تا : ح ← ح

$$\text{تا}: \text{س} \longmapsto \text{تا(س)} = \begin{cases} +1 & \text{إذا كان س} \rangle 0 \\ 0 & \text{إذا كان س} = 0 \\ -1 & \text{إذا كان س} \langle 0 \end{cases}$$

فإن $\underset{+0}{\text{نها}}$ تا = +1 و $\underset{-0}{\text{نها}}$ تا = – 1

إذن لا توجد نهاية عند (0) والدالة غير مستمرة عند الصفر.



3 – 1 – 3 – الإستمرار من اليسار والإستمرار من اليمين :

3 – 1 – 3 – 1 تعريف :

نقول عن الدالة تا أنها مستمرة من اليسار عند النقطة أ إذا وفقط إذا كانت :

* الدالة تا معرفة على :

مجال من الشكل [أ – ل ، أ] حيث ل ∋ ح^*_+.

* نهاية تا من اليسار عند أ تساوي تا(أ).

مثال :

تا : س ← $\sqrt{1 - \text{س}}$. معرفة في المجال] – ∞ ، + 1]

– الدالة تا معرفة من أجل س = +1 وعلى يسار +1

(على المجال] 0 ، +1] مثلاً).

– $\underset{-1+}{\text{نها}}$ تا = $\underset{\text{س} \to +1}{\text{نها}} \sqrt{1 - \text{س}} = 0 = \sqrt{1 - 1}$ = تا(1).

ومنه تا مستمرة من اليسار عند النقطة +1.

3 – 1 – 3 – 2 – تعريف :

نقول عن الدالة تا أنها مستمرة من اليمين عند النقطة أ إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية :

* تكون تا معرفة عند أ وعلى يمين أ يعني تكون معرفة في مجال من الشكل [أ ، أ + ل [. حيث ل ∈ $ح_+^*$.

وَ

* $\underset{أ^+}{\text{نها}}$ تا = تا (أ).

مثال : تا : س ⟵ $\sqrt{س}$ (عند النقطة 0).

– تا معرفة على المجال [0 ، +∞ [فهي معرفة على أي مجال من الشكل [0 ، ل [مثل [0 ، +1 [.

– $\underset{0^+}{\text{نها}}$ تا = $\underset{س \leftarrow 0^+}{\text{نها}}$ $\sqrt{س}$ = 0 = $\sqrt{0}$ = تا(0).

وعلية فإن تا مستمرة من اليمين عند النقطة 0.

3 – 1 – 3 – 3 – نتيجة :

حسب ما سبق في التعاريف الثلاثة للإستمرار، الإستمرار من اليسار والإستمرار من اليمين يمكن الوصول إلى النتيجة التالية :

تكون الدالة مستمرة عند نقطةأ إذا كانت مستمرة من اليسار ومن اليمين عند النقطةأ

3 – 1 – 4 – تعريف :

نقول عن الدالة تا إنها مستمرة على المجال :

*] أ ، ب [إذا كانت مستمرة عند كل نقطة من] أ ، ب [.

*] أ ، ب] إذا كانت مستمرة على المجال] أ ، ب [ومستمرة من اليسار عند النقطة ب.

* [أ ، ب [إذا كانت مستمرة على المجال] أ ، ب [ومستمرة من اليمين عند النقطةأ.

* [أ ، ب] إذا كانت مستمرة على المجال] أ ، ب [ومستمرة من اليسار عند ب ومن اليمين عند أ.

مثـال :

$$تا : ح_+ \longrightarrow ح_+$$

$$س \longmapsto \sqrt{س}$$

* تـا معرفـة علـى الـمجـال$ح_+$ ومن أجل أي عدد$أ$ من $ح_+^*$ فـإن :

$\underset{أ}{نـهـا}$ تـا= $\sqrt{أ}$ = تـا (أ). (راجـع الـنـظـريـات الـخـاصـة بـالـنـهـايـات).

إذن تـا مـستـمـرة علـى الـمجـال] 0 ، +∞ [.

* وفـيـمـا يـخـص الـنـقـطـة 0 لا يـوجد استـمـرار من الـيـسـار (بـسـبـب عدم الـتـعـريـف) فـهـل تـا مستـمـرة مـن الـيـمـيـن ؟

– تـا معرفـة عـنـد0 وعـلـى يـمـين0 (تـا معرفـة على [0 ، +∞ [ )

– $\underset{0^+}{نـهـا}$ تـا = 0 = $\sqrt{0}$ = تـا(0).

– إذن تـا مـسـتـمـرة مـن الـيـمـيـن عـنـد (0) ومـنـه فـهـي مـسـتـمـرة عـلـى الـمـجـال [0 ، +∞ [كـلـه.

3 – 2 – تركـيـب الدوال الـمستمرة والعمـلـيات عـلـيـهـا :

3 – 2 – 1 – نـظـريـة :

إذا كـانـت الـدالـة تـا مـسـتـمـرة عـنـد الـنـقـطـة$أ$ والـدالـة هـا مـسـتـمـرة عـنـد الـنـقـطـة تـا(أ) فـإن هـا o تـا مـسـتـمـرة عـنـد أ.

مثـال :

تـا : س $\longmapsto$ س^2 مـسـتـمـرة عـنـد + $\frac{1}{2}$ (تـأكـد مـن ذلـك)

هـا : س $\longmapsto$ جـب س مـسـتـمـرة عـنـد + $\frac{1}{4}$ (تـأكـد مـن ذلك)

إذن هاoتا : س $\longmapsto$ جـب س^2 مـسـتـمـرة عـنـد + $\frac{1}{2}$.

الـبـرهـان :

* تـا مـسـتـمـرة عـنـد أ مـعـنـاه :

* تـا مـعـرفـة فـي جوار لِـ أ. و $\underset{أ}{نـهـا}$ تـا = تـا(أ).

هـا مـسـتـمـرة عـنـد تـا(أ) مـعـنـاه :

*هـا معرفـة فـي جـوار لِـ تـا(أ)(نـضـع :تـا(س) = ع وَ تـا(أ) = ل)

* $\lim\limits_{ع \to ل}$ هـا(س) = هـا(ل)

إذا تقبلـنـا أنـه إذا كـانـت تـا معـرفـة فـي جوار لـِ ؟ وَ هـا معرفـة في جوار لـِ ع فـإنـه يـوجد جوار لـِ ؟ حيث هاo تـا تـكون مـعرفـة.

وإذا طـبقنـا الـنـظـريـة (2 – 3 – 3) الـتـي تـخص نـهـايـات : تـا ، هـا وَ هـاo تـا نـجد :

$\lim\limits_{؟}$ (هـاo تـا) = $\lim\limits_{ع}$ هـا = هـا(ع) = (هـاo تـا) (؟).

من كـل مـا سبق يـتـبـيّـن أن الدالـة هاo تا مستمرة عند الـنـقطة ؟.

3 – 2 – 2 – نـتـيـجـة مـبـاشـرة :

إذا كـانـت الدالـة تا مـسـتـمـرة عـلـى الـمـجـال ل والـدالة هـا مستمرة علـى الـمـجـال تـا(ل) = م فإن هـا oتـا مستمرة على الـمـجـال ل.

الـبـرهـان : الـنـظـريـة تُـسـتـنـتـج مـبـاشـرة مـن الـنـظـريـة الـسـابـقـة ومـن تـعـريـف الإسـتـمـرار عـلـى الـمـجـال.

3 – 2 – 3 – نـظـريـة :

إذا كـانـت الـدالـتـان تـا وَ هـا مـسـتـمـرتـيـن عـنـد الـنـقـطـة ؟ فـإن الـدوال : ك . تـا (حـيـث ك∋ ح)، | تـا | ، تـا + هـا وَ تـا . هـا مـسـتـمـرة عـنـد الـنـقـطـة ؟.

الـبـرهـان : الـدالـتـان تـا وَ هـا مـسـتـمـرتـان عـنـد ؟ مـعـنـاه :

* تـا وَ هـا مـعـرفـتـان فـي جـوار لـِ ؟.

* $\lim\limits_{؟}$ تـا = تـا(؟) وَ $\lim\limits_{؟}$ هـا = هـا(؟).

نستنـتـج :

* الـدوال ك . تـا ، | تـا | ، تـا+هـا وَ تـا.هـا مـعـرفـة فـي جوار لـِ ؟

* $\lim\limits_{؟}$ (ك.تـا) = ك . تـا(؟) وَ $\lim\limits_{؟}$ | تـا | =| تـا | (؟)

$\lim\limits_{؟}$ (تـا+ هـا) = (تـا + هـا)(؟) وَ $\lim\limits_{؟}$ (تـا.هـا) = (تـا . هـا)(؟)

حسب الفقرة (2 – 3 – 2)(الـنـهـايـات والـعـمـلـيـات على الدوال).

وهذا معـنــاه أن كـلا مـن الـدوال : ك تـا ،| تـا | ، (تـا + هـا) وَ تـا.هـا مـسـتـمـرة عـنـد؟.

3 – 2 – 4 – نـظـريـة :

إذا كانت الدالتان تا وَ ها مستمرتين عند؟ وإذا كان ها(أ) $\neq 0$ فإن الدالتين $\frac{1}{ها}$ وَ $\frac{تا}{ها}$ مستمرتان عند؟.

البرهان :

حسب المعطيات $\frac{1}{ها}$ وَ $\frac{تا}{ها}$ معرفتان عند أ وحسب نظريات الفقرة (2 – 3 – 2 –)

فإن $\underset{أ}{نها} \frac{1}{ها} = \left(\frac{1}{ها}\right)$ (أ) وَ

$\underset{أ}{نها} \frac{تا}{ها} = \left(\frac{تا}{ها}\right)$ (أ)

ومنه الدالتان $\frac{1}{ها}$ وَ $\frac{تا}{ها}$ مستمرتان عند؟

مثال :

الدالة جب مستمرة عند $\frac{\pi}{2}$ وَ جب $\frac{\pi}{2} \neq 0$ ، حسب النظرية السابقة الدالة $\frac{1}{جب}$ مستمرة عند $\frac{\pi}{2}$

3 – 3 – الدوال المستمرة المألوفة :

3 – 3 – 1 – الدوال الثابتة :

كل دالة ثابتة على مجال من ح مستمرة على هذا المجال.

البرهان :

النظرية نتيجة مباشرة إذا كانت تا دالة ثابتة على المجال ل وقيمتها م فإن : $\underset{أ}{نها}$ تا = م مهما كان في أ في ل.

3 – 3 – 2 – الجذر التربيعي :

الدالة تا : س ⟵ $\sqrt{س}$ مستمرة على $ح^{+}$

البرهان : دُرِس على شكل مثال في (3 – 1 – 4)

3 – 3 – 3 – نظرية :

كل الدوال على شكل كثير حدود مستمرة على ح

البرهان : كثيرات الحدود معرفة على ح وقد برهنا سابقاً أنه إذا كان " ك " كثير حدود فإن $\lim\limits_{أ}$ ك = ك (أ) مهما كان أ في ح .

3 – 3 – 4 – الدوال الناطقة :

كل دالة ناطقة مستمرة على كل المجالات التي تكون معرفة فيها.

البرهان : إذا كانت "ك" دالة ناطقة معرفة في مجال ل فإن : $\lim\limits_{أ}$ ك = ك(أ) من أجل أي عدد أ من ل.

3 – 3 – 5 – الدوال المثلثية :

3 – 3 – 5 –1 – نظرية :

" الجيب والتجيب " دالتان مستمرتان على ح

البرهان :

نعلم أن الجيب والتجيب معرفان في ح وَ أن :

∀ أ ∈ ح : $\lim\limits_{أ}$ جب س = جب أ وَ $\lim\limits_{أ}$ تجب س = تجب أ

3 – 3 – 5 – 2 – نظرية :

الدالتان الظل والتظل مستمرتان في أي مجال تكونان فيه معرفتين.

مثال :

الظل دالة معرفة في المجالات من الشكل: $\left] -\frac{\pi}{2} + ك\pi \text{ ، } +\frac{\pi}{2} + ك\pi \right[$

فهي مستمرة في هذه المجالات .(مثل $\left] -\frac{\pi}{2} \text{ ، } +\frac{\pi}{2} \right[$).

البرهان : أرجع إلى نهايات الدوال المثلثية حيث درسنا أن مهما كان أ من مجموعة تعريف الظل فإن $\lim\limits_{أ}$ ظل س = ظل أ.

وبرهان مماثل فيما يخص التظل.

3 – 4 – نظرية القيم المتوسطة :

3 – 4 – 1 – : نـظريـة كـوشـي :

إذا كـانـت الـدالـة تـا مسـتـمـرة علـى الـمـجـال [أ ، ب] وإذا إخـتـلـفـت إشـارتـي تـا (أ) وَ تـا(ب) فـإن تـا تـنـعـدم عـلـى الأقـل مرة في] أ ، ب [.

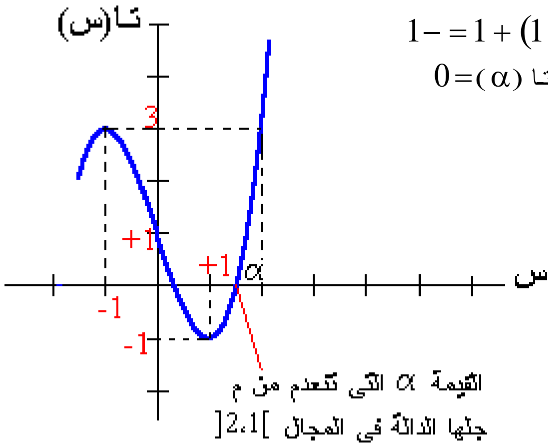
الـبـرهـان : (خـارج عن الـبـرنـامـج).

مـثـال : تـا : س ⟵ س ^{3} – 3 س + 1 فـي الـمـجـال [+1 ، +2]

* تـا مسـتـمـرة عـلـى [+1 ، +2] .(لأن تـا مستـمرة علـى ح لأنـهـا كـثـيـر حـدود والـمـجـال جـزء من ح.)

* $تـا(+1) = (+1)^3 - 3(+1) + 1 = -1$

* يـوجـد عـدد α ∈]1 ، 2 [بـحـيـث تـا $(\alpha) = 0$



3 – 4 – 2 – نـظريـة الـقـيـم الـمـتـوسـطـة :

إذا كـانـت تـا دالـة مسـتـمـرة عـلـى مـجـال [أ ، ب] فـإن : مـهـمـا كـان ع مـحـصـور بـين تـا(أ) وَ تـا(ب) يـوجـد عـلـى الأقل عدد α من الـمـجـال [أ ، ب] بـحـيـث : تـا $(\alpha) =$ ع.

أي بـتـعـبـيـر آخـر :

إذا كـانـت تـا مسـتـمـرة عـلـى الـمـجـال [أ ، ب] فـإنـهـا تـأخـذ عـلـى الأقـل مـرة كـل قـيـمـة مـحـصـورة بـيـن تـا(أ) وَ تـا(ب).

الـبـرهـان :

* إذا كـان : ع = تـا(أ) أو ع = تـا(ب) يـكـون α = أ أو α = ب.

* إذا كـان ع≠ تـا(أ) وَ ع≠ تـا(ب) لـنـضـع هـا(س) = تـا(س) – ع.

الـدالـة ها مستـمرة على [أ ، ب] نـتـيـجـة إسـتـمـرار تـا (ع ثـابـت)

زيـادة عـن هذا : هـا(أ) = تـا(أ) − ع وَ هـا (ب) = تـا(ب) − ع وبمـا أن ع محصـور بين تـا(أ) وتـا(ب) يـكون لـديـنا إمـا تـا(أ) < ع < تـا(ب) وإمـا تـا(ب) < ع < تـا(أ) وفـي كـلـتـي الـحـالـتـين فـإن الـعـددين تـا(أ) − ع وَ تـا(ب) − ع مـختـلـفـان فـي الإشـارة.

وخلاصة القول أن الدالـة هـا تـحـقق نظريـة كـوشـي (3 − 4 − 1)

وعليـه يـوجـد عدد α بحيث هـا(α) = 0 يـعنـي تـا(α) − ع = 0

أي : تـا(α) = ع.

مـثـال :

ظل : ح ← ح . في المـجـال $\left[-\frac{\pi}{3} ، +\frac{\pi}{3}\right]$.

س ↤ ظـل س

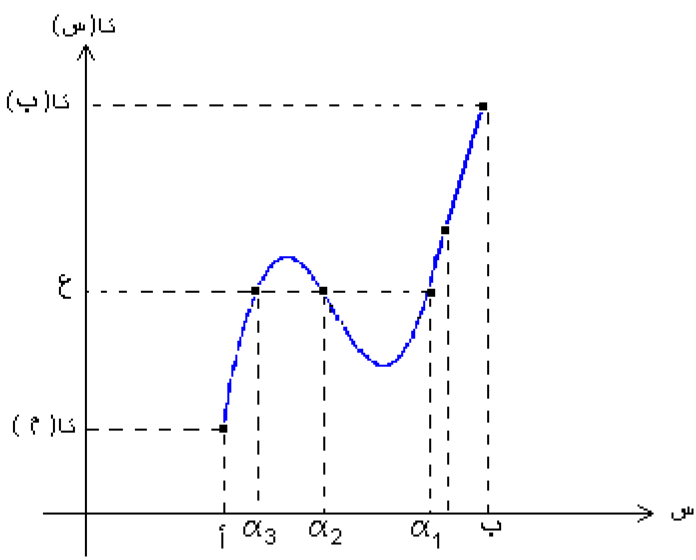
ظـل $\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ وَ ظـل $\left(+\frac{\pi}{3}\right) = +\sqrt{3}$

هل تـوجـد قيـمـة α فـي $\left]-\frac{\pi}{3} ، +\frac{\pi}{3}\right[$ بـحـيـث ظـل $\alpha = \sqrt{2}$ ؟

الـدالـة ظل مـسـتـمـرة عـلـى المـجـال $\left[-\frac{\pi}{3} ، +\frac{\pi}{3}\right]$ وَ $-\sqrt{3} < \sqrt{2} < \sqrt{3}$

ومـنـه يـوجـد عـدد α فـي $\left[-\frac{\pi}{3} ، +\frac{\pi}{3}\right]$ بـحـيـث ظـل $\alpha = \sqrt{2}$.

مـلاحـظـة : الـنـظـريـة تـضـمـن وجـود الـعـدد α لـكـنـهـا لا تُـحـدّد طـريـقـة حـسـابـه.



إذا كانت الدالة تا مستمرة على [أ ، ب] توجد على الأقل قيمة α (3 قيم هنا)، بحيث : تا(α) = ع

4 – الدوال المستمرة الرتيبة تماماً :

4 – 1 – خواص الدوال المستمرة الرتيبة تماماً :

4 – 1 – 1 نظرية أساسية :

إذا كانت دالة تا مستمرة ورتيبة تماماً على المجال [أ ، ب] فهي تقابل من [أ ، ب] إلى $[\alpha \text{ ، } \beta]$ حيث α هي أصغر القيمتين : تا(أ) وَ تا(ب) و β أكبرهما.

البرهان :

1) لنبرهن أن تا متباينة :

تا رتيبة تماماً معناه إما تا متزايدة تماما أو إما تا متناقصة تماماً

وهذا معناه : $\forall$(س$_1$ ، س$_2$)$\in$[أ ، ب]^2: س$_1$ 〈 س$_2$

$$\left[\text{تا}(\text{س}_1) \,\langle\, \text{تا}(\text{س}_2)\right] \text{ س}_1 \,\langle\, \text{س}_2 \Leftarrow \text{ أو } \left[\text{تا}(\text{س}_1) \,\rangle\, \text{تا}(\text{س}_2)\right]$$

إذن : $\forall$(س$_1$ ، س$_2$)$\in$[أ ، ب]^2: س$_1$ $\neq$ س$_2$ $\Leftarrow$ تا(س$_1$) $\neq$ تا(س$_2$)

وهذا يعني أن تا متباينة.

2) لنبرهن أن تا غامر : تا مستمرة على [أ ، ب] يمكن إذن تطبيق نظرية القيم المتوسطة لها :

$\forall$ ع $\in[\alpha \text{ ، } \beta]$، $\exists$ ر $\in$[أ ، ب] / تا(ر) = ع

وهذا معناه : تا: [أ ، ب]$\longrightarrow[\alpha \text{ ، } \beta]$ غامر.

أمثلة :

1) جب : $\left[-\frac{\pi}{2} \text{ ، } +\frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1 \text{ ، } +1]$، دالة مستمرة ومتزايدة تماماً فهي تطبيقاً متقابلاً.

2) تا : $[-3 \text{ ، } 0] \longrightarrow [0 \text{ ، } 9]$، دالة مستمرة ومتناقصة تماماً

س $\longmapsto$ س^2

فهي تقابل

4 – 1 – 2 – الدالة العكسية للدالـة مستمرة ورتيبة تمامـاً :

نظرية :

1 – كل دالة تا : [أ ، ب] ⟵ [تا(أ) ، تا (ب)] مستمرة ومتزايدة تماماً تقبل دالة عكسية $تا^{-1}$ حيث :

$تا^{-1}$: [تا(أ) ، تا (ب)] ⟵ [أ ، ب] مستمرة ومتزايدة تماماً

2 –كل دالة تا:[أ،ب]⟵[تا(أ) ، تا (ب)] مستمرة ومتناقصة تماماً تقبل دالة عكسية $تا^{-1}$حيث :

$تا^{-1}$: [تا(أ) ، تا (ب)] ⟵ [أ ، ب] مستمرة ومتناقصة تماماً

البرهان :

لنكتفي بالبرهان على الجزء الأول من النظرية.

1) وجود $تا^{-1}$: تا مستمرة ورتيبة تماماً فهي تقابل ومنه تقبل دالة عكسية $تا^{-1}$.

2) الدالة العكسية مستمرة (البرهان خارج عن البرنامج)

3) الدالة العكسية لها نفس إتجاه التغير.

ليكن $ع_1$ وَ $ع_2$ عددين من : [تا(أ) ، تا (ب)] :

يوجد $س_1$ وَ $س_2$ من المجال [أ ، ب] حيث $تا(س_1) = ع_1$ وَ $تا(س_2) = ع_2$ أي $س_1 = تا^{-1}(ع_1)$ وَ $س_2 = تا^{-1}(ع_2)$

لدينا : $ع_1 < ع_2 \Leftrightarrow تا(س_1) \langle تا(س_2)$. لأنه لو كان :

$س_1 \geq س_2$ لكان $تا(س_1) \geq تا(س_2)$ لأن تا متزايدة.

$تا(س_1) \langle تا(س_2) \Leftarrow س_1 < س_2$

$ع_1 < ع_2 \Leftarrow تا^{-1}(ع_1) < تا^{-1}(ع_2)$

وهذا يعني أن $تا^{-1}$ متزايدة تماماً على المجال [تا(أ)، تا(ب)]

مثال :

مهما كان أ من $ح_+^*$ فإن الدالة : تا : [0 ، أ] ⟵ [0 ، $أ^2$]

$س \longmapsto س^2$

تقبل دالة عكسية (رمزها $\sqrt{\ }$) :

$تا^{-1}: [0 ، أ^2] \longrightarrow [0 ، أ]$

$س \longmapsto \sqrt{س}$.

4 – 1 – 3 – الدوال المستمرة الرتيبة تماماً على مجال كيفي :

4 – 1 – 3 – 1 – نظرية :

1 – كل دالة تا مستمرة ومتزايدة تماماً على مجال كيفي (أ ، ب) تمثل تقابلاً من (أ ، ب) إلى مجال (β, α) من نفس النمط حيث α = $\underset{أ}{نها}$ تا وَ β = $\underset{ب}{نها}$ تا.

البرهان : (خارج عن البرنامج)

ملاحظات :

– المجال (أ ، ب) كيفي يمثل أحد المجالات :

[أ ، ب] أو] أ ، ب [أو [أ ، ب [أو]أ ، ب].

حيث أ وَ ب عددان حقيقيان أو $-\infty$ أو $+\infty$.

2 – المجالان $(\alpha ، \beta)$ وَ (أ ، ب) من نفس النمط معناه أن كل حدين متماثلين مغلقين معاً أو مفتوحين معاً.

أمثلة :

* ظل : $]-\frac{\pi}{2} ، +\frac{\pi}{2}[\longrightarrow]-\infty ، +\infty[$ تقابل لأن :

الدالة ظل مستمرة ومتزايدة على $]-\frac{\pi}{2} ، +\frac{\pi}{2}[$ وَ $\underset{س \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+}{نها}$ ظل س $= -\infty$

$\underset{س \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^-}{نها}$ ظل س $= +\infty$

* تا : $]0 ، 1] \longrightarrow [1 ، +\infty[$ تقابل لأن : تا مستمرة على $]0 ، 1]$

$س \longmapsto \frac{1}{س}$

ومتناقصة تماماً بالإضافة إلى أن :

$\underset{0^+}{نها}$ تا = $+\infty$ وَ $\underset{1}{نها}$ تا = 1 ومنه صورة المجال $]0 ، 1]$ بالدالة تا هي $[1 ، +\infty[$.

4 – 1 – 3 – 2 – نظرية :

1 – كل تقابل تا : (أ ، ب) ← (α ، β) مستمر ومتزايد تماماً يقبل تقابلاً عكسياً تا$^{-1}$: (α ، β) ⟼ (أ ، ب) مستمراً ومتزايداً تماماً.

2 – كل تقابل تا : (أ ، ب) ← (β ، α) مستمر ومتناقص تماماً يقبل تقابلا عكسياً : تا$^{-1}$: (β ، α) ← (أ ، ب) مستمراً ومتناقصاً تماماً.

أمثلة :

1 – تا : [0 ، + ∞ [← [0 ، + ∞ [.

س ⟼ س^2

الدالة تا مستمرة ومتزايدة تماماً وَ $\lim_{0}$ تا$=0$ و $\lim_{+\infty}$ تا$=+\infty$ فالدالة تا إذن تقابل مستمر ومتزايد فهو يقبل تقابلا عكسياً

تا$^{-1}$:] 0 ، +∞ [←[0 ، +∞ [

س ⟼ $\sqrt{س}$

2 – تجب : [0 ، π] ← [−1 ، +1] تقابل متناقص يقبل تقابلاً عكسياً :

قو تجب : [−1 ، +1] ← [0 ،π] (قو تجب $\frac{1}{2}$ = $\frac{\pi}{3}$ مثلاً).

4 – 1 – 4 – بيان دالة عكسية :

نظرية :

إذا كانت دالة تا تقبل دالة عكسية $تا^{-1}$ فإن التمثيل البياني لِـ $تا^{-1}$ يناظر التمثيل البياني لِـ تا بالنسبة إلى المنصف الأول (بالنسبة إلى معلم متعامد ومتجانس)

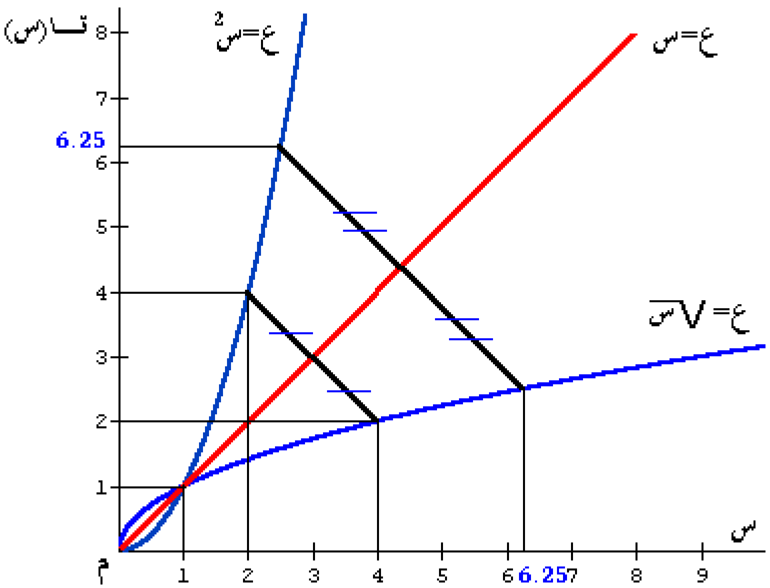
البرهان :

نعلم (أرجع إلى دروس الهندسة) أن التحويل :

تا : ن (س ، ع) ⟵ نَ (ع ، س) هو التناظر بالنسبة إلى المنصف الأول.

وبما أن كل نقطة ن (س ، ع) من التمثيل البياني لِـ تا تقابلها نقطة نَ (ع ، س) من التمثيل البياني لِـ $تا^{-1}$ (لأن : ع = تا(س) ⟺ س = $تا^{-1}$(ع)) فإن التمثيلين متناظران.

مثال :



يمثل الشكل التمثيل البياني للدالة تا : س ⟼ $س^2$ (بخط مستمر) والتمثيل البياني لدالتها العكسية $تا^{-1}$: س ⟼ $\sqrt{س}$ (بخط متقطع).

4 – 2 – دراسة نموذج من الدوال المستمرة والرتيبة تماماً :

(الجذور النونية).

4 – 2 – 1 – دراسة الدوال : تا$_{ن}$: ح$_{+}$ ⟵ ح$_{+}$ (ن ∋ ط*).

س ⟼ س^{ن}

4 – 2 – 1 – 1 – نظرية :

مهما كان ن من ط* : الدالة تا$_{ن}$: ح$_{+}$ ⟵ ح$_{+}$

س ⟼ س^{ن}

مستمرة ومتزايدة تماماً فهي تقبل دالة عكسية تا$_{ن}^{-1}$ تقابلية مستمرة ومتزايدة..

البرهان :

1 – الدالة تا$_{ن}$ مستمرة نتيجة كونها كثير الحدود.

2 – مهما كان ن من ط* : تا$_{ن}$ متزايدة تماماً لأنه مهما كان س$_{1}$ وَ س$_{2}$ من ح$_{+}$

$$س_{2}^{ن} - س_{1}^{ن} = (س_{2} - س_{1})(س_{2}^{ن-1} - س_{2}^{ن-1}.س_{1} + س_{2}^{ن-3}.س_{1}^{2} + ... + س_{2}^{2}.س_{1}^{ن-3} + س_{2}.س_{1}^{ن-2} + س_{1}^{ن-1})$$

يعني إشارة س$_{2}^{ن}$ – س$_{1}^{ن}$ هي إشارة س$_{2}$ – س$_{1}$ لأن : س$_{2}^{ن-1}$ + ... + س$_{1}^{ن-1}$ مجموع أعداد موجبة.

س$_{2}$ > س$_{1}$ ⟺ س$_{2}$ – س$_{1}$ > 0 ⟺ س$_{2}^{ن}$ – س$_{1}^{ن}$ > 0 ⟺ س$_{2}^{ن}$ > س$_{1}^{ن}$

يعني أن تا$_{ن}$ متزايدة تماماً.

3 – نها$_{0}$ تا$_{ن}$ = 0 وَ نها$_{+\infty}$ تا$_{ن}$ = $+\infty$.

ينتج مما سبق أن : تا$_{ن}$: ح$_{+}$ ⟵ ح$_{+}$ تقابل

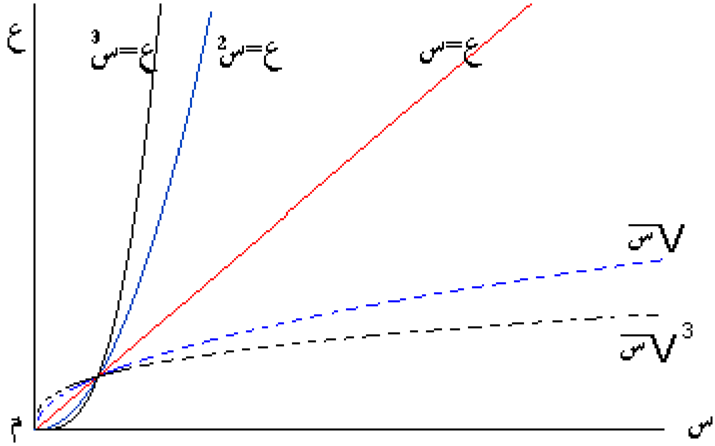
4 – حسب النظرية (4 –1 – 3 – 2) تا$_{ن}$ تقبل دالة عكسية تا$_{ن}^{-1}$: ح$_{+}$ ⟵ ح$_{+}$ مستمرة ومتزايدة تماماً.

أمثلة :

نعلم أن الدالة العكسية لِ تا$_{2}$ هي الجذر التربيعي الموجب وأن الدالة العكسية لِ تا$_{3}$ هي الجذر التكعيبي ولدينا :

$$\forall (س ، ع) \in ح_{+}^{2} : ع = س^{2} \Leftrightarrow س = \sqrt{ع} \text{ وَ } ع = س^{3} \Leftrightarrow س = \sqrt[3]{ع}$$

4 – 2 – 1 – 2 – المنحنيات البيانية :



4 – 2 – 2 – دراسة الجذور النونية :

4 – 2 – 2 – 1 – تعريف :

نسمي جذراً نونياً ونرمز له بالرمز $\sqrt[ن]{\ }$ أو $(\ )^{\frac{1}{ن}}$ الدالة العكسية للدالة تا$_ن$:

ح$_+$ ← ح$_+$

س ↦ س^ن

ينتج من التعريف التكافؤ والمساواة التاليين :

ع = $\sqrt[ن]{س}$ ⟺ س = ع^ن و $(\sqrt[ن]{أ})^ن$ = $\sqrt[ن]{أ^ن}$ =أ.

(حسب خواص الدوال العكسية).

أمثلة :

$5 = \sqrt[3]{125} \Leftrightarrow 5^3 = 125$.

$2 = \sqrt[5]{32} \Leftrightarrow 2^5 = 32$.

$3 = (81)^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow 3^4 = 81$.

4 – 2 – 2 – 2 – الخواص التحليلية للجذر النوني :

الجذر النوني دالة مستمرة متزايدة تماماً من ح$_+$ إلى ح$_+$ ينتج عن هذا أن :

أ = ب ⟺ $\sqrt[ن]{أ}$ = $\sqrt[ن]{ب}$ (التباين).

أ > ب ⟺ $\sqrt[ن]{أ}$ > $\sqrt[ن]{ب}$ (التزايد التام) .

4 – 2 – 2 – 3 – الخواص الجبرية للجذر النوني :

مهما كان أ وَ ب في ح_+ وَ ن في ط* يكون لدينا :

1 - $\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}} \;.\; \sqrt[\text{ن}]{\text{ب}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{أ ب}}$.

2 $\sqrt[\text{ن}]{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}} = \frac{\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}}}{\sqrt[\text{ن}]{\text{ب}}}$ (إذا كان ب $\neq 0$).

3 - $\sqrt[\text{ن}]{\sqrt[\text{م}]{\text{أ}}} = \sqrt[\text{ن.م}]{\text{أ}}$

البرهان :

1 - القوة النونية تباينية

$$\left(\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}} \;.\; \sqrt[\text{ن}]{\text{ب}}\right)^{\text{ن}} = \left(\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}}\right)^{\text{ن}} . \left(\sqrt[\text{ن}]{\text{ب}}\right)^{\text{ن}} = \text{أ} \;.\; \text{ب} = \left(\sqrt[\text{ن}]{\text{أ ب}}\right)^{\text{ن}}$$

وبما أن الصورتين : $\left(\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}} . \sqrt[\text{ن}]{\text{ب}}\right)^{\text{ن}}$ وَ $\left(\sqrt[\text{ن}]{\text{أ ب}}\right)^{\text{ن}}$ متساويتان فإن السابقتين متساويتان يعني :

$$\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}} \;.\; \sqrt[\text{ن}]{\text{ب}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{أ ب}}$$

2 - تبرهن بنفس الطريقة التي استعملت في برهان (1).

3 - يكفي أن نرفع الطرفين إلى القوة ن.م :

$$\left(\sqrt[\text{ن}]{\sqrt[\text{م}]{\text{أ}}}\right)^{\text{ن.م}} = \left[\left(\sqrt[\text{ن}]{\sqrt[\text{م}]{\text{أ}}}\right)^{\text{ن}}\right]^{\text{م}} = \left[\sqrt[\text{م}]{\text{أ}}\right]^{\text{م}} = \text{أ}$$

$$\left(\sqrt[\text{ن.م}]{\text{أ}}\right)^{\text{ن.م}} = \text{أ}$$

وبما أن القوة النونية تباينية فإن الطرفين متساويان.

مثال :

$$\sqrt[3]{27 \times 8} = \sqrt[3]{216} = 6 \quad \text{وَ} \quad \sqrt[3]{27 \times 8} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{27} = 2$$
$$\times\, 3 = 6$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2 = \sqrt[6]{64} \;.$$

4 - 2 - 3 - القوى ذات الأس الناطق :

إذا كان ط عدداً ناطقاً ($\text{ط} = \frac{\text{ن}}{\text{م}}$ ، ن∈ص، م∈ ط*) نعرف القوة $\text{س}^{\text{ط}}$ بالعلاقة :

$$\forall\, \text{س} \in \text{ح}^*_+ : \text{س}^{\text{ط}} = \sqrt[\text{م}]{\text{س}^{\text{ن}}} = \left(\sqrt[\text{م}]{\text{س}}\right)^{\text{ن}} .$$

مثال :

$64^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{64}\right)^{2} = (4)^{2} = 16.$

$81^{-\frac{3}{4}} = \left(\sqrt[4]{81}\right)^{-3} = (3)^{-3} = \frac{1}{3^{3}} = \frac{1}{27}.$

ملاحظة :

1 – لكي يكون التعريف سليمًا لا بد أن تكون النتيجة ثابتة لما يتغير ممثل ط، مثلاً لا بد من أن يكون $5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{4}{6}}$. فنتقبل ذلك.

2 – نتأكد بسهولة من أن : $\sqrt[م]{س^{ن}} = \left(\sqrt[م]{س}\right)^{ن}$ يكفي لذلك أن نرفع الطرفين إلى القوة م.

4 – 2 – 4 – العمليات على القوى ذات الأس الناطق :

يُبرهن أن القوى ذات الأس الناطق تخضع إلى نفس القواعد التي تخضع لها القوى ذات الأس الصحيح فيما يخص العمليات يعني أنه إذا كان : ط وَ ر عددين ناطقين ، س وَ ع عددين حقيقين موجبين تماماً فإن

$س^{ط} . س^{ر} = س^{ط+ر}$.	(1)
$س^{ط} . ع^{ط} = (س.ع)^{ط}$.	(2)
$\frac{س^{ط}}{س^{ر}} = س^{ط-ر}$.	(3)
$\left(\frac{س}{ع}\right)^{ط} = \frac{س^{ط}}{ع^{ط}}$	(4)
$\left(س^{ط}\right)^{ر} = س^{طر} = (س^{ر})^{ط}$.	(5)

مثال :

$$\left(16^{3}\right)^{\frac{1}{4}} \times 8^{-\frac{2}{3}} = \left[16^{\frac{1}{4}}\right]^{3} . \left[8^{\frac{1}{3}}\right]^{-2} = (2)^{3} . (2)^{-2} = 2^{3-2} = 2$$

البرهان :

نبرهن على سبيل المثال القاعدة (1) :

يمكننا إيجاد ممثلين لِـ ط وَ ر لهما نفس المقام مثلاً :

ط = $\frac{أ}{جـ}$ وَ ر = $\frac{ب}{جـ}$ ومنه .

$$س^{ط} . س^{ر} = س^{\frac{أ}{جـ}} . س^{\frac{ب}{جـ}} = \left(\sqrt[جـ]{س}\right)^{أ} . \left(\sqrt[جـ]{س}\right)^{ب}$$

$$= \left(\sqrt[جـ]{س}\right)^{أ+ب} = س^{\frac{أ+ب}{جـ}} = س^{\frac{أ}{جـ}+\frac{ب}{جـ}} = س^{ط+ر}$$

5 - المشتقات :

5 - 1 - التعريف والتفسير الهندسي:

5 - 1 - 1 -التعريف :

لتكن تا دالة معرفة في جوار العدد الحقيقي $س_0$. نقول عن تا إنها قابلة للآشتقاق عند $س_0$ إذا وفقط إذا كانت النسبة $\frac{تا(س) - تا(س_0)}{س - س_0}$ تقبل نهاية منتهية عندما س يؤول إلى $س_0$.

إذا وجدت هذه النهاية يُرمَز لهاتاَ$(س_0)$ وتُسمّى العدد المشتق للدالة تا عند $س_0$ أو بصفة أبسط مشتق تا عند $س_0$

أمثلة :

تا : س ⟼ $س^2$ ، $س_0 = 3$

معرفة في ح وبالتالي في جوار 3. لدينا :

$$\underset{س \leftarrow 3}{نها} \frac{تا(س) - تا(3)}{س - 3} = \underset{س \leftarrow 3}{نها} \frac{(س - 3) (س + 3)}{س - 3}$$

$$= \underset{س \leftarrow 3}{نها} (س + 3) = 6.$$

إذن : الدالة تا قابلة للآشتقاق عند 3 وعددها المشتق هو 6، تاَ(3) = 6.

2 – ها : $\text{س} \longmapsto \dfrac{1}{\text{س}}$ $\text{س}_0 = 2$

ها معرفة على $]0 ، +\infty[$ وعلى $]-\infty ، 0[$ فهي معرفة في جوار 2.

$$\lim_{\text{س}\to 2}\frac{\text{ها(س)}-\text{ها}(2)}{\text{س}-2}=\lim_{\text{س}\to 2}\frac{\dfrac{1}{\text{س}}-\dfrac{1}{2}}{\text{س}-2}=\lim_{\text{س}\to 2}\frac{\dfrac{2-\text{س}}{2\text{س}}}{\text{س}-2}$$

$$=\lim_{\text{س}\to 2}\frac{2-\text{س}}{2\text{س}}\times\frac{1}{\text{س}-2}=\lim_{\text{س}\to 2}\frac{-1}{2\text{س}}=-\frac{1}{4}$$

إذن ها قابلة للآشتقاق عند 2 وَ هاَ $(2) = -\dfrac{1}{4}$.

3 – عا : $\text{س} \longmapsto |\text{س}|$ $\text{س}_0 = 0$ عا معرفة على ح فهي معرفة في جوار 0

$$\frac{\text{عا(س)}-\text{عا}(0)}{\text{س}-0}=\frac{|\text{س}|-|0|}{\text{س}}=\frac{|\text{س}|}{\text{س}}=\begin{cases}+1 & \text{إذا كان س} > 0\\ -1 & \text{إذا كان س} < 0\end{cases}$$

إذن $\lim_{\text{س}\to 0^+}\text{عا(س)}=\lim_{\text{س}\to 0^+}\dfrac{|\text{س}|}{\text{س}}=\lim_{\text{س}\to 0^+}(+1)=+1$

$$\lim_{\text{س}\to 0^-}\text{عا(س)}=\lim_{\text{س}\to 0^-}\frac{|\text{س}|}{\text{س}}=\lim_{\text{س}\to 0^-}(-1)=-1$$

ليست للنّسبة $\dfrac{\text{عا(س)}-\text{عا}(0)}{\text{س}-0}$ نهاية عند الصفر، نقول إذن أن الدالة عا غير قابلة للآشتقاق عند الصفر.

5 – 1 – 2 – الدالة المشتقة :

لتكن تا دالة قابلة للآشتقاق في حيِّز ر. نُسمي الدالة المشتقة لِ تا على ر الدالة تاَ التي تُرفق بكل عدد س من ر العدد المشتق للدالة تا عند س

$$\text{ح} \rightarrow \text{ح}$$

مثال :

$$\text{س} \longmapsto \text{س}^2$$

من أجل س_0 كيفي في ح لدينا :

$$\underset{س \to س_0}{نها} \frac{س^2 - س_0^2}{س - س_0} = \underset{س \to س_0}{نها} \frac{(س - س_0)(س + س_0)}{س - س_0} = \underset{س \to س_0}{نها} (س + س_0) = 2س_0$$

إذن : $\forall$ س$_0$ $\ni$ ح : تاَ(س$_0$) = 2.

يعني أن الدالة المشتقة لِ تا هي الدالة :

$$\begin{aligned} تاَ: ح &\to ح \\ س &\mapsto 2س \end{aligned}$$

5 – 1 – 3 – المشتق من اليمين ومن اليسار :

تعريف :

* نقول عن الدالة تا المعرفة عند س$_0$ وعلى يمين س$_0$ أنها قابلة للآشتقاق من اليمين

عند س$_0$ إذا وفقط إذا كانت النسبة $\frac{تا(س) - تا(س_0)}{س - س_0}$ تقبل نهاية منتهية عند س$_0$ على اليمين.

* نقول عن الدالة تا المعرفة عند س$_0$ وعلى يسار س$_0$ أنها قابلة للآشتقاق من اليسار عند س$_0$ إذا وفقط إذا كانت النسبة $\frac{تا(س) - تا(س_0)}{س - س_0}$ تقبل نهاية منتهية عند س$_0$ على اليسار.

مثال : تا : س $\mapsto$ |س|. عند س$_0$ = 0

رأينا سابقا أن :

$$\underset{س \to 0^+}{نها} \frac{|س| - |0|}{س - 0} = +1 \quad \text{وأن} \quad \underset{س \to 0^-}{نها} \frac{|س| - |0|}{س - 0} = -1$$

نقول إذن الدالة "| |" تقبل مشتقين من اليمين ومن اليسار مختلفين ونكتبها :

$$تاَ(0^+) = +1 \quad \text{وَ} \quad تاَ(0^-) = -1$$

ملاحظة : نستنتج من التعاريف الثلاث للمشتق، المشتق من اليسار والمشتق من اليمين أن الدالة تا تقبل مشتقا عند س$_0$ إذا كانت تقبل مشتقا من اليمين ومشتقا من اليسار عند س$_0$ متساويين.

5 – 1 – 4 تعبير آخر للتعريف :

إذا وضعنا $\text{س} - \text{س}_0 = \text{ل}$ في التعريف (5 −1 −1) يكون لدينا : $\text{س} = \text{س}_0 + \text{ل}$.

لما $\text{س} \longrightarrow \text{س}_0$ ، $\text{س} - \text{س}_0 \longrightarrow 0$ إذن $\text{ل} \longrightarrow 0$ فنكتب :

$$\text{تا}'\left(\text{س}_0\right) = \underset{\text{س}\to\text{س}_0}{\text{نها}} \frac{\text{تا}(\text{س}) - \text{تا}\left(\text{س}_0\right)}{\text{س} - \text{س}_0} = \underset{\text{س}\to\text{س}_0}{\text{نها}} \frac{\text{تا}\left(\text{س}_0 + \text{ل}\right) - \text{تا}\left(\text{س}_0\right)}{\text{ل}}$$

إذا وجد المشتق :

$$\boxed{\text{تا}'\left(\text{س}_0\right) = \underset{\text{ل}\to 0}{\text{نها}} \frac{\text{تا}\left(\text{س}_0 + \text{ل}\right) - \text{تا}\left(\text{س}_0\right)}{\text{ل}}}$$

5 − 1 − 5 − الإشتقاق والإستمرار :

نظرية :

> إذا كانت دالة قابلة للاشتقاق عند نقطة س_0 ، فهي مستمرة عند س_0 .

البرهان :

تا قابلة للإشتقاق عند س_0 معناه أن تا معرفة في جوار س_0

و $\underset{\text{س}\to\text{س}_0}{\text{نها}} \frac{\text{تا}(\text{س}) - \text{تا}\left(\text{س}_0\right)}{\text{س} - \text{س}_0} = \text{م}$ (حيث م عدد حقيقي يمثل العدد المشتق لِ تا عند س_0)

نعتبر الدالة δ المعرفة كما يلي : $\delta(\text{س}) = \frac{\text{تا}(\text{س}) - \text{تا}\left(\text{س}_0\right)}{\text{س} - \text{س}_0}$ إذا كان $\text{س} \neq \text{س}_0$ وَ $\delta\left(\text{س}_0\right) = \text{م}$

من تعريف الدالة δ نستنتج :

$\text{تا}(\text{س}) = \text{تا}\left(\text{س}_0\right) + \left(\text{س} - \text{س}_0\right).\delta(\text{س})$ عندما يؤول س إلى س_0 يؤول $\delta(\text{س})$ إلى م لأن تا قابلة للآشتقاق عند س_0 وبالتالي يؤول تا(س) إلى $\text{تا}\left(\text{س}_0\right)$

إذن : الدالة تا مستمرة عند س_0

ملاحظة : القضية العكسية خاطئة :

مثال مضاد : الدالة " | | " مستمرة عند الصفر لكن لا تقبل مشتقاً عند هذه النقطة.

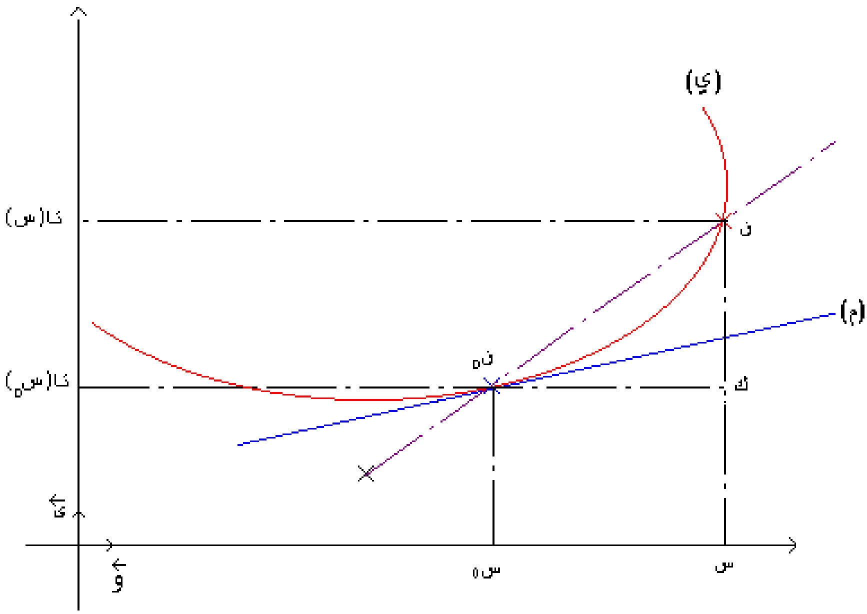
5 − 1 − 6 − التفسير الهندسي للمشتق :

لتكن دالة تا قابلة للإشتقاق عند النقطة $س_0$

$$\frac{تا(س) - تا(س_0)}{س - س_0} = \frac{\Delta ع}{\Delta س} = \frac{\overline{ك\,ن}}{\overline{ن_0\,ك}}$$ مـيل المستقيم $(ن\,ن_0)$.

$$\lim_{س \to س_0} \frac{تا(س) - تا(س_0)}{س - س_0} = \lim_{\Delta س \to 0} \frac{\Delta ع}{\Delta س}$$ = نهاية ميل المستقيم $(ن\,ن_0)$ لما ن ينتهي عند $ن_0$

فعندما ن ينتهي إلى $ن_0$ المستقيم $(ن\,ن_0)$ في حد وضعيته هو المماس لمنحني تا في النقطة $ن_0(س_0 ، تا(س_0))$. (أنظر الشكل).



إذن $تا'(س_0)$ = ميل المماس (م) لمنحنى الدالة تا عند النقطة $ن_0(س_0 ، تا(س_0))$.

نستخلص مما سبق أن :

* المنحنى (ي) الممثل للدالة تا يقبل مماساً عند النقطة $ن_0(س_0 ، تا(س_0))$ إذا وفقط إذا كانت الدالة تا قابلة للأشتقاق عند $س_0$.

ونقول أن المنحنى يقبل نصف مماس من اليمين أو من اليسار إذا كانت الدالة تقبل مشتقاً من اليمين أو من اليسار عند النقطة $س_0$

5 – 2 – مشتقات الدوال المألوفة (مراجعة) :

5 – 2 – 1 – الدوال الثابتة :

إذا كانت دالة ثابتة على مجال فإنها تقبل مشتقا معدوما في هذا المجال.

5 – 2 –2– وحيدات الحد :

كل دالة وحيد الحد قابلة للإشتقاق على مجال تعريفها حيث :

$$\left(أ\ س^{ن}\right)' = أ.\ ن\ س^{ن-1} .أ \in ح\ ،\ ن \in ط^*$$

وبالأخص : $\left(س^{ن}\right)' = ن.\ س^{ن-1}$

5 – 2 – 3 – كثيرات الحدود :

كل دالة كثير الحدود قابلة للأشتقاق وإذا كان :

$ك(س) = أ_{ن} س^{ن} + أ_{ن-1} س^{ن-1} + . . . + أ_2 س^2 + أ_1 س + أ_0$. فإن :

$ك'(س) = أ_{ن} .ن\ س^{ن-1} + أ_{ن-1}(ن-1) س^{ن-2} + . . . + 2أ_2 س + أ_1$

5 – 2 – 4 – الدوال الناطقة :

* كحاصل قسمة كثيري حدود كل دالة ناطقة قابلة للإشتقاق على كل المجالات التي تكون فيها معرفة :

* بالأخص : $\left(\frac{1}{س}\right)' = -\frac{1}{س^2}$

$$\left(\frac{أ\ س + ب}{جـ\ س + د}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{vmatrix}}{\left(جـ\ س + د\right)^2} = \frac{\left(أ\ د - جـ\ ب\right)}{\left(جـ\ س + د\right)^2} .$$

5 – 2 – 5 – الجذر التربيعي :

إذا كان : تا(س) = $\sqrt{س}$. (س > 0).

$$\left(\sqrt{س}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{س}} \quad (س > 0)$$

5 – 2 – 6 – الـدوال الـمـثـلـثـيـة :

الـدوال الـمـثـلـثـيـة قـابـلـة لـلآشـتـقـاق عـلـى كـل مـجـال تـعـريـفـهـا. ولـديـنـا :

(جـب)َ = تـجـب
(تـجـب)َ = – جـب
(ظـل)َ = $1 +$ ظـل $^2 = \frac{1}{(\text{تـجـب})^2}$
(تظـل)َ = $-1-($ تـظـل $)^2 = -\frac{1}{(\text{جـب})^2}$

بـصـفـة أعـم إذا كـانـت ي دالـة قـابـلـة لـلآشـتـقـاق فـإن :

(جـب ي)َ = (ي)َ تـجـب ي.

(تـجـب ي)َ = – (ي)َجـب ي.

مـثـال :

تـا(س) = جب (أ س + ب) ، هـا(س) = تجب (أ س + ب).

تـاَ(س) = [جـب(أس + ب)]َ =(أس + ب)َتجب (أس + ب) = أ تجب (أس + ب)

هاَ(س) = [تجب (أس +ب)]َ = –(أس + ب)َجب(أس + ب) = –أجب (أس +ب)

5 – 3 – حـسـاب الـمـشـتـقـات :

5 – 3 – 1 نـظـريـة : (مـراجـعـة) :

إذا كانـت دالـتان تا وَ ها تقبلان الإشتقاق في مجال ر فإن الدوال :λ تا حيث $\lambda \in$ ح، تا + ها ، تا . ها وَ تـا^{ن} حيث (ن$\in$ ط*) تقبل الإشتقاق في المجال ر ويكون لدينا :
*(λ تا)َ = λ تاَ
*(تا + ها)َ = تاَ + هاَ.
*(تا . ها)َ = تا . هاَ + تاَ . ها.
*(تـا^{ن})َ = ن تـا$^{ن-1}$. تـاَ

البرهان : (أرجع إلى دروس السنة الثانية ثانوي).

5 –3 – 2 – نظرية : (مراجعة) :

إذا كانت الدالتان تا وَ ها تقبلان الإشتقاق في مجال ر و كانت ها لا تنعدم في ر فإن الدالتين $\frac{1}{ها}$ وَ $\frac{تا}{ها}$ تقبلان الإشتقاق في ر ويكون لدينا :

$$\left(\frac{1}{ها}\right)' = -\frac{ها'}{(ها)^2}$$

$$\left(\frac{تا}{ها}\right)' = \frac{تا'.ها - تا.ها'}{(ها)^2}$$

البرهان : (أرجع إلى دروس السنة الثانية ثانوي).

5 – 3 – 3 – مشتق دالة مركبة :

نظرية :

إذا كانت الدالة تا قابلة للإشتقاق عند النقطة $س_0$ وإذا كانت ها دالة قابلة للإشتقاق عند $ع_0$ حيث $ع_0 = تا(س_0)$، فإن الدالة عا المعرفة بـ :عا = هاoتا قابلة للإشتقاق عند $س_0$ ولدينا العلاقة :

$$عا'(س_0) = ها'[تا(س_0)] . تا'(س_0)$$

البرهان :

1) تا وَ ها قابلتان للآشتقاق عند $س_0$ وَ $ع_0$ على الترتيب يعني أنهما مستمرتان عند هاتين النقطتين. وهذا يعني أن تا معرفة على مجال مفتوح ل يحتوي على $س_0$ كما يوجد مجال م تكون فيه ها معرفة. يمكن اختيار المجالين بحيث يكون تا(ل)$\subset$ م.

2) لتكن α الدالة المعرفة في ل بالعلاقة :

$$\forall \text{ س} \ni \text{ل / س} \neq \text{س}_0 : \alpha(\text{س}) = \frac{\text{تا(س)} - \text{تا(س}_0)}{\text{س} - \text{س}_0} - \text{تا}'(\text{س}_0)$$

إذا كان س $\neq$ $س_0$ وَ α ($س_0$) = 0

نتحقق بسهولة من أن α مستمرة عند $س_0$.

نعرف كذلك الدالة β في المجال م بالعلاقة :

$\forall$ ع $\in$ م / ع $\neq$ ع$_0$: $\beta(\text{ع}) = \dfrac{\text{ها}(\text{ع}) - \text{ها}(\text{ع}_0)}{\text{ع} - \text{ع}_0} - \text{هاَ}(\text{س}_0)$. إذا كان ع $\neq$ ع$_0$ وَ

$\beta(\text{ع}_0) = 0$

يمكننا كذلك التحقق بسهولة من أن β مستمرة عند ع$_0$.

حسب هذا التعريف α وَ β تحققان العلاقتين :

$$\text{تا}(\text{س}) - \text{تا}(\text{س}_0) = (\text{س} - \text{س}_0)\left[\text{تاَ}(\text{س}_0) + \alpha(\text{س})\right] \qquad (1)$$

$$\text{ها}(\text{ع}) - \text{ها}(\text{ع}_0) = (\text{ع} - \text{ع}_0)\left[\text{هاَ}(\text{ع}_0) + \beta(\text{ع})\right] \qquad (2)$$

3) لنحسب $\text{عا}(\text{س}) - \text{عا}(\text{س}_0)$

$$\text{عا}(\text{س}) - \text{عا}(\text{س}_0) = \text{ها}\left[\text{تا}(\text{س})\right] - \text{ها}\left[\text{تا}(\text{س}_0)\right]$$

$$= \left[\text{تا}(\text{س}) - \text{تا}(\text{س}_0)\right]\left[\text{هاَ}\left[\text{تا}(\text{س}_0)\right] + \beta\left[\text{تا}(\text{س})\right]\right]$$

(بتعويض ع بـ تا(س) في العلاقة (2) السابقة)

$$\text{عا}(\text{س}) - \text{عا}(\text{س}_0) = (\text{س} - \text{س}_0)\left[\text{تاَ}(\text{س}_0) + \alpha(\text{س})\right]\left[\text{هاَ}\left[\text{تا}(\text{س})\right] + \beta\left[\text{تا}(\text{س})\right]\right]$$

ومنه :

$$\frac{\text{عا}(\text{س}) - \text{عا}(\text{س}_0)}{\text{س} - \text{س}_0} = \left[\text{تاَ}(\text{س}_0) + \alpha(\text{س})\right]\left[\text{هاَ}\left[\text{تا}(\text{س}_0)\right] + \beta\left[\text{تا}(\text{س})\right]\right]$$

لما $\text{س} \to \text{س}_0$ ، $\alpha(\text{س}) \to 0$ ، $\text{تا}(\text{س}) \to \text{تا}(\text{س}_0)$ و $\beta\left[\text{تا}(\text{س})\right] \to 0$

ويبقى : $\lim\limits_{\text{س} \to \text{س}_0} \dfrac{\text{عا}(\text{س}) - \text{عا}(\text{س}_0)}{\text{س} - \text{س}_0} = \text{تاَ}(\text{س}_0) \times \text{هاَ}\left[\text{تا}(\text{س}_0)\right]$

مثال : تا دالة قابلة للإشتقاق وموجبة على المجال ل.

الدالة "ها " هي الجذر التربيعي ($\sqrt{}$)المعرفة والقابلة للإشتقاق في ح_+^*. الدالة عا هي الدالة المركبة

$\sqrt{\text{تا}}$ المعرفة على ل.

(النظرية تثبت لنا قابلية اشتقاق الدالة عا وتعطينا المشتق عند س$_0$).

$$\text{عاَ}(\text{س}_0) = \left(\sqrt{\text{تا}}\right)'(\text{س}_0) = \text{تاَ}(\text{س}_0) \times \frac{1}{2\sqrt{\text{تا}(\text{س}_0)}} = \frac{\text{تاَ}(\text{س}_0)}{2\sqrt{\text{تا}(\text{س}_0)}}$$

5 – 3 – 4 مشتق الدالة العكسية لدالة قابلة للآشتقاق :

نظرية :

لتكن تا دالة معرفة على مجال ل وتقبل دالة عكسية $تا^{-1}$ وليكن $س_0$ عنصر من ل.
إذا كانت تا قابلة للآشتقاق عند $س_0$ وكان المشتق $تاَ(س_0)$ غير معدوم فإن $تا^{-1}$ قابلة للإشتقاق عند النقطة $ع_0$ حيث $ع_0 = تا(س_0)$ وعددها المشتق يحقق العلاقة :

$$\left(تا^{-1}\right)'(ع_0) = \frac{1}{تاَ(س_0)}$$

البرهان :

$تاَ(س_0) \neq 0$ معناه يوجد مجال ل يحتوي على $س_0$ بحيث :

$$\forall س \in ل : س \neq س_0 \Leftarrow \frac{تا(س) - تا(س_0)}{س - س_0} \neq 0$$

أي $\forall س \in ل : س \neq س_0 \Leftarrow تا(س) \neq تا(س_0)$.

ليكن م = تا(ل).

لنحسب $\frac{تا^{-1}(ع) - تا^{-1}(ع_0)}{ع - ع_0}$ علماً أن ع = تا(س) أو $س = تا^{-1}(ع)$

وَ $ع_0 = تا(س_0)$ أو $س_0 = تا^{-1}(ع_0)$

$$\frac{تا^{-1}(ع) - تا^{-1}(ع_0)}{ع - ع_0} = \frac{س - س_0}{تا(س) - تا(س_0)}$$

لما $ع \to ع_0$: $تا^{-1}(ع) \to تا^{-1}(ع_0)$ (لأن $تا^{-1}$ مستمرة نتيجة إستمرار تا)

وهذا يعني أن : $س \to س_0$ ومنه :

$$\lim_{ع \to ع_0} \frac{تا^{-1}(ع) - تا^{-1}(ع_0)}{ع - ع_0} = \lim_{س \to س_0} \frac{س - س_0}{تا(س) - تا(س_0)} = \lim_{س \to س_0} \frac{1}{\frac{تا(س) - تا(س_0)}{س - س_0}}$$

$$= \frac{1}{تاَ(س_0)}$$ (مع العلم أن $تاَ(س_0) \neq 0$ فرضا)

أمثلـة :

1) تا : $ح_+^* \to ح_+^*$ قابلة لـلآشـتقاق على $ح_+^*$ وتقابلية وَ $تاَ(س) = 2س$

$س \mapsto س^2$

ودالـتـهـا الـعـكـسـيـة هـي : $ح_+^* \to ح_+^*$

$س \mapsto \sqrt{س}$

لدينا : $ع = س^2 \Leftrightarrow س = \sqrt{ع}$ فـي $ح_+^*$

$تا^{-1}$ قابلة للإشتقاق ولدينا :

$\left(تا^{-1}\right)'(ع) = \dfrac{1}{تاَ(س)}$ يعني $\left(\sqrt{ع}\right)' = \dfrac{1}{2س}$.

وبتعويض س بـ $\sqrt{ع}$ نجد : $\left(\sqrt{ع}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{ع}}$.

2) تا : $\left]-\dfrac{\pi}{2} ، +\dfrac{\pi}{2}\right[\to \left]-\infty ، +\infty\right[$

س $\mapsto$ ظل س. تقابلية وقابلة للإشتقاق في $\left]-\dfrac{\pi}{2} ، +\dfrac{\pi}{2}\right[$

ونعلم أن (ظل)َ(س) = 1 + (ظل س)^2. ومنه $\forall$ س $\in \left]-\dfrac{\pi}{2} ، +\dfrac{\pi}{2}\right[$:

1 + ظل^{2}س $\neq 0$ فالدالة تا$^{-1}$ معرفة وقابلة إذن للإشتقاق على $\left]-\infty ، +\infty\right[$

يُرمز لِـ $تا^{-1}$ بالرمز " قو ظل ". لدينا :

$\forall$ س $\in \left]-\dfrac{\pi}{2} ، +\dfrac{\pi}{2}\right[$ ، $\forall$ ع $\in \left]-\infty ، +\infty\right[$: ع = ظل س $\Leftrightarrow$ س = قو ظل ع

لنحسب (قو ظل)َ :

(قو ظل)َ (ع) = $\dfrac{1}{(\text{ظل})'(س)} = \dfrac{1}{1 + (\text{ظل س})^2}$.

وبتعويض س بِـ قو ظل ع نجد :

(قو ظل)َ (ع) = $\dfrac{1}{1 + \left[\text{ظل}(\text{قو ظل})(ع)\right]^2} = \dfrac{1}{1+ع^2}$.

وفي النهاية : (قو ظل)َ(ع) = $\dfrac{1}{1+ع^2}$ أو (قو ظل)َ (س) = $\dfrac{1}{1+س^2}$.

5 – 3 – 5 –الجذور النونية :

* الجذر النوني $\sqrt[ن]{\ }$ عُرف كدالة عكسية للقوة النونية ومنه

$$ع = س^{ن} \Leftrightarrow س = \sqrt[ن]{ع} \qquad (س \in ح_{+}^{*}،\ ع \in ح_{+}^{*}،\ ن \in ط^{*})$$

القوة النونية دالة قابلة للإشتقاق وبالتالي الجذر النوني يقبل مشتقا تُحدّده العلاقة :

$$\left(\sqrt[ن]{ع}\right)' = \frac{1}{ن\, س^{ن-1}}$$

وبتعويض س بِـ $\sqrt[ن]{ع}$ نجد :

$$\left(\sqrt[ن]{ع}\right)' = \frac{1}{ن.\left(\sqrt[ن]{ع}\right)^{ن-1}}$$

نعلم أنه إذا وضعنا : $\sqrt[ن]{ع} = ع^{\frac{1}{ن}}$ فإننا نجد : $\left(\sqrt[ن]{ع}\right)^{ن-1} = ع^{\frac{ن-1}{ن}} = ع^{1-\frac{1}{ن}}$ ومنه :

$$\boxed{\left(ع^{\frac{1}{ن}}\right)' = \frac{1}{ن}\, ع^{\frac{1}{ن}-1}}$$

5 – 3 – 6 – القوى ذات الأس الناطق :

ليكن ط عدداً ناطقاً حيث : $ط = \frac{م}{ن}$ وَ $م \in ص$ ، $ن \in ط^{*}$.

$$س^{ط} = س^{\frac{م}{ن}} = \left(\sqrt[ن]{س}\right)^{م}$$

نضع : تا : س ↦ $\sqrt[ن]{س}$ وَ ها : ع ↦ $ع^{م}$ فيكون لدينا : $س^{ط} = \left(\sqrt[ن]{س}\right)^{م}$ = ها [تا(س)]. إذن :

$$(\text{ها} \circ \text{تا})'(س) = \text{ها}'[\text{تا}(س)] \times \text{تا}'(س) = م.[\text{تا}(س)]^{م-1}.(\sqrt[ن]{س})'$$

ومنه : $\left(س^{ط}\right)' = م.\left(\sqrt[ن]{س}\right)^{م-1}.\frac{1}{ن}س^{\frac{1}{ن}-1} = م\,س^{\frac{م-1}{ن}}.\frac{1}{ن}س^{\frac{1-ن}{ن}}$

$$= \frac{م}{ن}س^{\frac{(م-1)+(1-ن)}{ن}} = \frac{م}{ن}س^{\frac{م-ن}{ن}} = \frac{م}{ن}س^{\frac{م}{ن}-1}$$

$$\boxed{\left(س^{ط}\right)' = ط\, س^{ط-1}}$$

5 – 3 – 7 – المشتقات النونية :

5 – 3 – 7 – 1 – المشتق الثاني :

إذا كانت دالة تا قابلة للإشتقاق في مجال ر و كانت الدالة المشتقة تقبل أيضاً الإشتقاق على ر نسمي مشتقتها المشتق الثاني لـ تا ونرمز له : تاً . إذن : تاً = (تاَ)َ

مثال :

تا : س ⟵ س^4 + 2س^3 – 5 س^2 + 4س – 7.

تاَ(س) = 4 س^3 + 6س^2 – 10 س + 4.

تاً (س) = 12س^2 + 12س – 10

5 – 3 – 7 – 2 – المشتق النوني :

إذا كانت دالة تا تقبل مشتقاً ثانٍ وإذا كانت تاً تقبل مشتقاً يسمى هذا المشتق " المشتق الثالث " لِـ تا ونرمز له تا$^{(3)}$ وهكذا نتحصل على المشتقات المتتابعة :

تا$^{(4)}$ ، تا$^{(5)}$ ، . . . . ، تا$^{(ن)}$ إن وجدت.

وبصفة عامة فإنه : إذا كانت تا دالة تقبل الإشتقاق (ن +1) مرة فإن :

$$\text{تا}^{(ن+1)} = \left[\text{تا}^{(ن)}\right]'$$

مثال :

في المثال السابق :

تا$^{(3)}$ (س) = 24 س + 12

تا$^{(4)}$ (س) = 24

تا$^{(5)}$ (س) = 0 ومنه : ∀ ن ∍ ط وَ ن > 5 فإن تا$^{(ن)}$ (س) = 0

5 – 4 – تطبيقات المشتقات :

5 – 4 – 1 – نظرية رول :

إذا كانت الدالة تا :

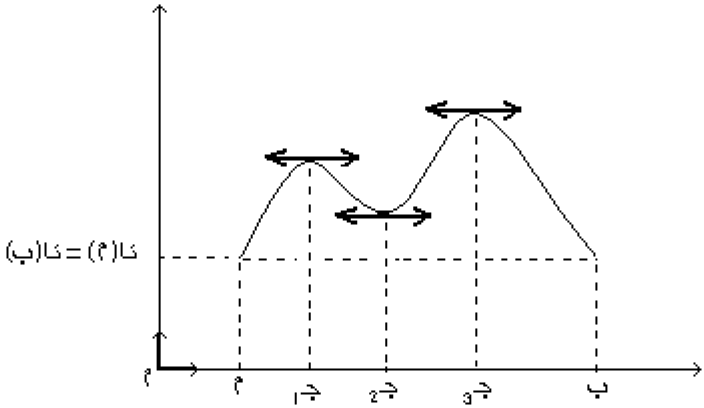
– مستمرة على المجال[أ ، ب].

– قابلة للأشتقاق في المجال]أ ، ب [.

– تحقق المساواة تا(أ) = تا(ب).

فإنه يوجد على الأقل، عدد جـ في]أ ، ب[بحيث : تاَ (جـ) = 0

البرهان : (خارج البرنامج).



ملاحظة : شروط نظرية رول كافية وليست لازمة.

مثال :

تا: س ⟵ س^3−س. تحقق شروط النظرية على المجال [−1 ، +1] وبالتالي نستنتج بدون إجراء أي حساب أنه يوجد على الأقل عدد في] −1 ، 1 [بحيث : تاَ (س) = 0

5 – 4 – 2 – نظرية التزايدات المنتهية :

إذا كانت الدالة تا :

مستمرة على المجال [أ ، ب].

قابلة للاشتقاق على]أ ، ب [.

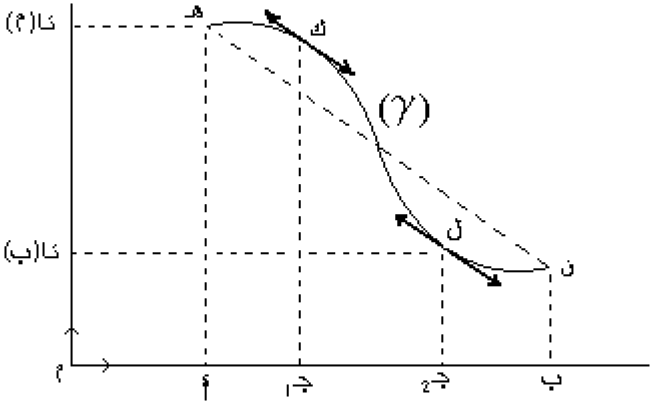
فإنه توجد على الأقل قيمة جـ في]أ ، ب [بحيث : تا(ب) – تا(أ) = (ب –أ) تاَ (جـ).

تا(ب) – تا(أ) = (ب – أ) تاَ (جـ)

معناه تاَ(جـ) = $\frac{\text{تا(ب)} - \text{تا(أ)}}{\text{ب} - \text{أ}}$.

التفسير الهندسي :

هـ ، ن النقطتان بحيث : هـ (أ ، تا (أ)) وَ ن (ب ، تا(ب)). (الشكل) النظرية تقول أنه إذا كانت الدالة تا مستمرة على [أ ، ب] وقابلة للاشتقاق على]أ ، ب[فإنه يوجد على الأقل نقطة ل من المنحني (γ) يكون فيها المماس موازياً للمستقيم (هـ ن).



البرهان :

لنضع α = $\dfrac{\text{تا(ب)} - \text{تا(أ)}}{\text{ب} - \text{أ}}$ وهو معامل توجيه المستقيم (هـ ن) وَ ي (س) =α (س – أ) بحيث التمثيل البياني لِ (ي) هو المستقيم (هـ ن) .

لتكن ها الدالة المعرفة على [أ ، ب] بالمساواة :

ها (س) = تا(س) – ي (س)

لدينا : ها(أ) = تا(أ) –ي (أ) = تا(أ) –α(أ – أ)

أي ها(أ) = تا(أ).

ولدينا : ها(ب) = تا(ب) – α (ب – أ)

$$= \text{تا(ب)} - \frac{\text{تا(ب)} - \text{تا(أ)}}{\text{ب} - \text{أ}} \cdot (\text{ب} - \text{أ})$$

= تا(ب) – [تا(ب) – تا(أ)] = تا(ب) – تا(ب) + تا(أ) = تا(أ).

إذن ها(أ) = ها(ب) = تا(أ).

زيادة عن هذا ها مستمرة على [أ ، ب] وقابلة للاشتقاق على] أ ، ب [كفرق دالتين مستمرتين وقابلتين للآشتقاق في الخلاصة ها تحقق شروط نظرية رول ومنه توجد على الأقل قيمة جـ في] أ ، ب[بحيث هاَ(جـ) = 0 . لكن : هاَ(س) = [تا(س) –α (س – أ)]َ = تاَ(س) –α ومنه هاَ(جـ) = 0 $\Leftrightarrow$ تاَ(جـ) – α = 0 $\Leftrightarrow$ تاَ(جـ) = α. يعني :

تاَ(جـ) = $\dfrac{\text{تا(ب)} - \text{تا(أ)}}{\text{ب} - \text{أ}}$ أي تاَ(جـ) . (ب – أ) = تا(ب) – تا(أ).

تطبيق النظرية في الحسابات التقريبية :

مثال :

حساب جب31° علماً أن جب30° = $\frac{1}{2}$.

ندرس الدالة جب في المجال [30° ، 31°] يعني [$\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}$]

الدالة مستمرة على [$\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}$] وقابلة للإشتقاق على] $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}$ [

يوجد إذن عدد جـ على الأقل في المجال المفتوح بحيث :

جب ($\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}$) −جب $\frac{\pi}{6}$ = $\frac{\pi}{180}$ (جب)َ(جـ) = $\frac{\pi}{180}$ تجب(جـ)

إذا أخذنا جـ ≃ $\frac{\pi}{6}$ فيكون لنا تجب (جـ) ≃ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ≃ 0.866

ومنه : جب 31° = جب ($\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}$)≃ جب $\frac{\pi}{6}$ + $\frac{\pi}{180}$. 0.866

= $\frac{1}{2}$ + 0.015 = 0.515.

جدول الجيب يعطينا جب 31° = 0.515.

5 – 4 – 3 – المشتق وإتجاه تغيرات دالة :

نظرية :

إن الدالة تا القابلة للاشتقاق على المجال ر تكون :

– ثابتة على هذا المجال إذا وفقط إذا كان :

∀ س∈ ر : تاَ (س) = 0.

– متزايدة على ر إذا وفقط إذا كان :

∀ س∈ ر : تاَ (س) ≥ 0.

– متناقصة على ر إذا وفقط إذا كان :

∀ س∈ ر : تاَ (س) ≤ 0.

البرهان :

1 – إذا كانت الدالة تا ثابتة، أو متزايدة أو متناقصة على الترتيب فتكون النسبة $\frac{تا(س) - تا(س_0)}{س - س_0}$ يعني تاَ(س$_0$) معدومة أو موجبة أو سالبة على الترتيب

(أرجع إلى النظرية 2 – 3 – 1 – 1 حول النهاية والحفاظ على الإشارة).

2 – إذا كان الآن : تاَ (س) = 0 أو تاَ(س) $\leq$ 0 أو تاَ(س) $\geq$ 0 على الترتيب في ر، هل تكون تا حتماً ثابتة أو متزايدة أو متناقصة على ر؟.

لنبرهن ذلك :

ليكن س$_1$ وَ س$_2$ كيفيين في ر. فإن تا تحقق شروط نظرية التزايدات المنتهية على المجال]س$_2$ ، س$_1$[ومنه يوجد جـ في]س$_2$ ، س$_1$[

بحيث : $\frac{تا(س_2) - تا(س_1)}{س_2 - س_1}$ = تاَ(جـ)

وإذا كان من أجل س كيفي في ر تاَ(س) = 0 أو تاَ(س) $\leq$ 0 أو تاَ (س) $\geq$ 0 على الترتيب

فيكون $\frac{تا(س_2) - تا(س_1)}{س_2 - س_1}$ معدوماً أو موجباً أو سالباً على الترتيب .

وبالتالي تكون تا ثابتة أو متزايدة أو متناقصة على الترتيب.

ملاحظة :

نقبل أنه إذا كانت تاَ(س) > 0 في المجال ر كله أو إذا كانت تنعدم في نقاط معزولة من ر فإن تا متزايدة تماماً في المجال ر.

مثال :

تا : س $\longmapsto$ س^3 في ح : تاَ(س) = 3س^2 .

تاَ(س) > 0 في ح إلا في 0. تاَ(0) = 0

بما أن تاَ(س) $\leq$ 0 في ح وبما أن مجموعة الأعداد التي من أجلها تاَ تنعدم لا تشكل مجالا، فإن تا متزايدة تماماً على ح.

5 – 4 – 4 – البحث عن النهايات الحدية لدالة قابلة للآشتقاق :

نظرية :

إذا كانت الدالة تا قابلة للآشتقاق في المجال]أ ، ب[وإذا كانت تبلغ قيمة عظمى أو قيمة صغرى عند النقطة $س_0$ ($س_0$ ∋] أ ، ب [ ). فإن $تا'(س_0) = 0$

البرهان :

لنفرض أنه توجد قيمة عظمى لِـ تا عند $س_0$. هذا يعني أنه يوجد مجال م حيث م =] $س_0 - \alpha$ ، $س_0 + \alpha$[وَ م ⊂] أ ، ب[،

ويكون : ∀ س ∋ م : تا(س) ≤ تا($س_0$) :

فيكون لدينا :

$$\forall \text{ س} \in \text{م} : \text{س}_0 - \alpha \leq \text{س} \langle \text{س}_0 \quad ، \quad \frac{\text{تا}(\text{س}) - \text{تا}(\text{س}_0)}{\text{س} - \text{س}_0} \geq 0 .$$

$$\text{ومنه ،} \quad \lim_{\substack{\text{س} \to \text{س}_0 \\ \langle}} \frac{\text{تا}(\text{س}) - \text{تا}(\text{س}_0)}{\text{س} - \text{س}_0} \geq 0 .$$ (حسب الفقرة 2 -3 -1-1)

ويكون لنا أيضاً :

$$\forall \text{ س} \in \text{م} : \text{س}_0 - \alpha \leq \text{س} \leq \text{س}_0 + \alpha \quad ، \quad \frac{\text{تا}(\text{س}) - \text{تا}(\text{س}_0)}{\text{س} - \text{س}_0} \leq 0 .$$

$$\text{ومنه ،} \quad \lim_{\substack{\text{س} \to \text{س}_0 \\ \rangle}} \frac{\text{تا}(\text{س}) - \text{تا}(\text{س}_0)}{\text{س} - \text{س}_0} \leq 0 .$$

لكن وجود مشتق تاَ($س_0$)عند النقطة $س_0$ يستلزم تساوي النهاتين وهذا يعني إنعدامها أي :

$$\lim_{\substack{\text{س} \to \text{س}_0 \\ \langle}} \frac{\text{تا}(\text{س}) - \text{تا}(\text{س}_0)}{\text{س} - \text{س}_0} = \lim_{\substack{\text{س} \to \text{س}_0 \\ \rangle}} \frac{\text{تا}(\text{س}) - \text{تا}(\text{س}_0)}{\text{س} - \text{س}_0} = \text{تا}'(\text{س}_0) = 0$$

ملاحظة :القضية العكسية غير صحيحة يعني إذا كان تاَ($س_0$) = 0 فلا يكون حتماً حداً أقصى أو أدنى عند $س_0$ والدليل على ذلك الدالة : $س \leftarrow س^2$ عند 0

لكن إذا كان المشتق ينعدم بتغيير إشارته فيكون حداً أقصى أو أدنى عند نقطة الإنعدام حسب الجدولين التاليين.

س		$س_0$	
تاَ(س)	−	0	+
تغيرات تا	↘	قيمة صغرى	↗

س		$س_0$	
تاَ(س)	+	0	−
تغيرات تا	↗	قيمة عظمى	↘

مثـال :

تـا : س ⟵ س^3 −3س + 2 . تـاَ(س) = 3 س^2 − 3 = 3 (س+1) (س−1).

لديـنـا الـجـدول الـتـالـي :

س	∞ −		1 −		1+		∞+
تاَ(س)		+	0	−	0	+	
تغــيرات الدالة تـا	∞−	↗	4+ قيمة عظمى	↘	0 قيمة صغرى	↗	∞+

5 − 4 − 5 − نـقـطـة الإنـعـطـاف :

تـعـريـف :

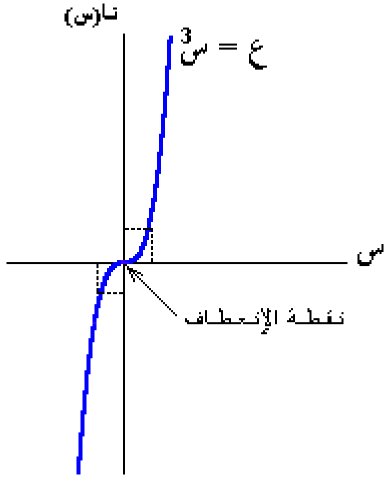
لـتـكـن تـا دالـة قـابـلـة لـلآشـتـقـاق مـرتـيـن ولـيـكـن (γ) تـمـثـيـلـهـا الـبـيـانـي. نـقـول أن الـمـنـحـنـى (γ) يـقـبـل نـقـطـة إنـعـطـاف عـنـد $س_0$ إذا كـان :الـمـشـتـق الـثـانـي يـنـعـدم مـع تـغـيـيـر إشـارتـه عـنـد $س_0$

مـثـال : تا س ⟵ س^3 ، لديـنـا : تـاً (س) = 6 س.

إشـارة تـاً(س) :

س	∞−		0		∞+
تـاً(س)		−	0	+	

عـنـد 0 ، تـاً تـنـعـدم مـغـيـرة إشـارتـهـا فـالـنـقـطـة م(0 ، 0) نـقـطـة إنـعـطـاف لـلـمـنـحـنـى.



ملاحظة :

الإنعطاف معناه تغيير الإنحناء.

يكون المنحنى محدبًا ثم يصير مقعراً أو العكس ونقطة التغيير هي نقطة الإنعطاف.

6 – دراسة الدوال العددية :

6 – 1 – مجموعة التعريف ومجال دراسة دالة :

بعد تعيين مجموعة التعريف ف للدالة تُدرس زوجيتها أو دوريتها إذا اقتضى الأمر فيمكن حينئذ تحديد مجال الدراسة ر إلى ف $\cap$ ح$_+$ إذا كانت الدالة زوجية أو فردية وإلى ل =] س$_0$ ، س$_0$ + د [حيث د هو دور الدالة.

6- 2 – النهايات والفروع اللانهائية :

6 – 2 – 1 – تدرس نهايات الدالة عند $-\infty$ وَ $+\infty$ إذا كان مجال الدراسة غير محدود وعند نقاط الإنقطاع (أو عدم الإستمرار)

6 – 2 – 2 – الفروع اللانهائية والخطوط المقاربة :

6 – 2 – 2 – 1 – الخطوط المقاربة العمودية :

نقول أن المستقيم الذي معادلته س =أ هو مستقيم مقارب لمنحنى الدالة تا إذا كان

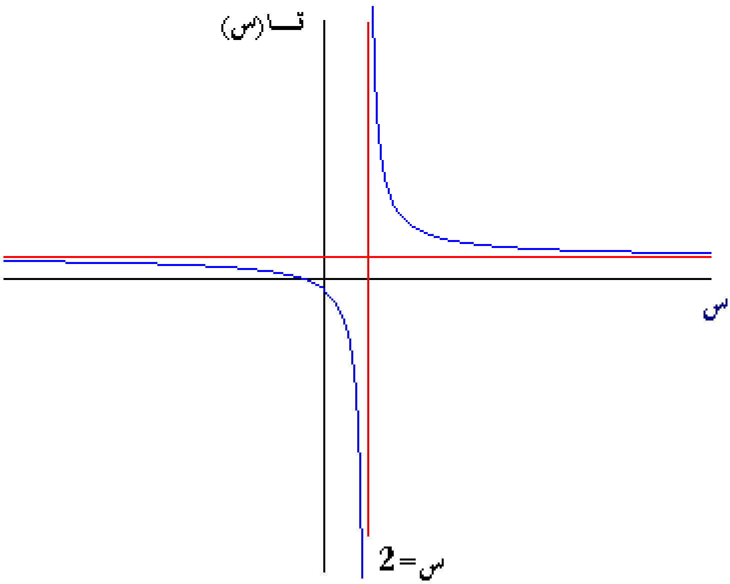
$\underset{س \leftarrow أ^{>}}{\text{نها}}$ تا(س) = $+\infty$ أو $\underset{س \leftarrow أ^{>}}{\text{نها}}$ تا(س) = $-\infty$

أو $\underset{س \leftarrow أ^{<}}{\text{نها}}$ تا(س) = $+\infty$ أو $\underset{س \leftarrow أ^{<}}{\text{نها}}$ تا(س) = $-\infty$

يعني إذا كانت إحدى النهايات من اليمين أو من اليسار عند أ غير منتهية.

مثال : تا : س $\longmapsto \dfrac{س+1}{س-2}$ ، عند أ = 2.

$\underset{+2}{\text{نها}}$ تا = $+\infty$ ، $\underset{-2}{\text{نها}}$ تا = $-\infty$



6 – 2 – 2 – 2 – المستقيم المقارب الأفقي :

نـقـول أن الـمـسـتـقـيـم الـذي مـعـادلـتـه ع = ب مـسـتـقـيـم مـقـارب لـمـنـحـنـى الـدالـة تـا إذا كـان

نـهـا$_{+\infty}$ تـا = ب أو نـهـا$_{-\infty}$ تـا = ب.

مـثـال : الـدالـة الـمـذكـورة فـي الـمـثـال الـسـابـق عـنـد ب = +1

لـديـنـا نـهـا$_{+\infty}$ تـا = نـهـا$_{-\infty}$ تـا = +1

فـالـمـسـتـقـيـم الـذي مـعـادلـتـه ع = 1 هـو مـسـتـقـيـم مـقـارب لـمـنـحـنـي الـدالـة تـا.

6 – 2 – 2 – 3 –المستقيم المقارب المائل :

نـقـول أن الـمـسـتـقـيـم الـذي مـعـادلـتـه ع =أ س + ب هـو مـسـتـقـيـم مـقـارب لـمـنـحـنـي تـا إذا كـان :

نـهـا$_{س\to+\infty}$ [تـا(س) –(أ س + ب)] = 0

أو

نـهـا$_{س\to-\infty}$ [تـا(س) –(أ س + ب)] = 0

مـثـال :

تـا : س $\mapsto$ $\frac{2س^2-3س+2}{س-1}$ ، ع = 2 س –1.

$$\underset{\infty}{\text{نها}}\left[\frac{2\text{س}^2-3\text{س}+2}{\text{س}-1}-(2\text{س}-1)\right]=\underset{\infty}{\text{نها}}\frac{2\text{س}^2-3\text{س}+2-(\text{س}-1)(2\text{س}-1)}{\text{س}-1}$$

$$\underset{\infty}{\text{نها}}\frac{2\text{س}^2-3\text{س}+2-2\text{س}^2+3\text{س}-1}{\text{س}-1}=\underset{\infty}{\text{نها}}\frac{1}{\text{س}-1}=0$$

إذن المستقيم الذي معادلته ع = 2 س − 1 مستقيم مقارب لمنحني الدالة تا.

6 − 2 − 2 − 4 البحث عن المستقيم المقارب المائل :

نحسب $\underset{+\infty}{\text{نها}}\frac{\text{تا}(\text{س})}{\text{س}}$ وَ $\underset{-\infty}{\text{نها}}\frac{\text{تا}(\text{س})}{\text{س}}$ إذا كانت إحدى النهايتين منتهية وقيمتها أ مثلاً ثم نحسب $\underset{+\infty}{\text{نها}}[\text{تا}(\text{س})-\text{أ}\text{س}]$. إذا كانت النهاية منتهية وقيمتها ب مثلاً فالمستقيم الذي معادلته

ع = أ س + ب هو مستقيم مقارب مائل لمنحني تا

ملاحظة : المستقيم المقارب، إذ وجد، وحيد وذلك نتيجة وحدانية النهاية عند نقطة معينة.

6 − 3 − إتجاه التغيرات :

يدرس إتجاه تغيرات دالة بواسطة المشتق أو بدونه إذا أمكن ذلك وتسجل كل التغيرات مع إضافة النهايات العظمى والصغرى إن وجدت.

6 − 4 − التمثيل البياني :

6 − 4 − 1 − وجود تناظر مركزي :

تا دالة عددية وَ(γ) تمثيلها البياني.ω نقطة إحداثياها (أ ، ب) نضع : سَ = س − أ وَعَ = ع − ب

لتكن ها الدالة المعرفة كما يلي :

ع = تا(س) $\Leftrightarrow$ عَ = ها(سَ)

تكون النقطةω مركز تناظر للمنحني (γ) إذا وفقط إذا كانت الدالة ها فردية.

*** ملاحظة :**

إن الطريقة المستعملة هنا ما هي إلا القيام بإجراء تغيير معلم، والتحقق من أن الدالة ها المحصل عليها فردية.

مثال :

تا : س $\longmapsto \dfrac{س+1}{س-2}$ ، ω (2 ، 1).

إذا كان سَ = س − 2 وَعَ = ع − 1

فإن : س = سَ + 2 وَ ع =عَ + 1

ومنه ع = $\dfrac{س+1}{س-2}$ ⇔ عَ + 1 = $\dfrac{(سَ+2)+1}{(سَ+2)-2}$ ⇔ عَ = $\dfrac{سَ+3}{سَ}$ − 1

عَ = $\dfrac{3+}{سَ}$ = ها(سَ).

يظهر أن ها فردية ومنه النقطةω (2 ، 1) هي مركز تناظر لمنحنى تا.

6 − 4 − 2 − وجود تناظر محوري :

تا دالة عددية وَ (γ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد وَمتجانس. أ عدد حقيقي.

نضع : سَ = س −أ وَ عَ = ع

لتكن ها الدالة المعرفة كما يلي :

ع = تا(س) ⇔ عَ = ها(سَ).

يكون المستقيم الذي معادلته س=أ محور تناظر للمنحنى (γ) إذا وفقط إذا كانت الدالة ها زوجية.

* **ملاحظة :**

إن الطريقة المستعملة هنا ما هي إلا القيام بإجراء تغيير معلم وَالتحقق من أن الدالة ها المحصل عليها زوجية.

مثال :

تا : س ⟼ س ^{2} −3س + 2 لنبين أن المستقيم الذي معادلته س= $\dfrac{3}{2}$ هو محور تناظر للمنحني الممثل للدالة تا في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس.

سَ = س − $\dfrac{3}{2}$ وَعَ = ع نجد :

$$\text{ع} = \text{س}^2 - 3\text{س} + 2 \Leftrightarrow \text{ع} = \left(\text{سَ} + \frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\text{سَ} + \frac{3}{2}\right) + 2.$$

$$\text{ع} = \text{س}^2 - 3\text{س} + 2 \Leftrightarrow \text{عَ} = \text{سَ}^2 + 3\,\text{سَ} + \frac{9}{4} - 3\,\text{سَ} - \frac{9}{2} + 2$$

$$\text{ع} = \text{س}^2 - 3\text{س} + 2 \Leftrightarrow \text{عَ} = \text{سَ}^2 - \frac{1}{4} = \text{ها(سَ)}.$$

نـتحـقق مـن أن هـا زوجـيـة ومـنـه الـمسـتقيـم الـذي مـعادلـتـه س = $\frac{3}{2}$ هـو مـحـور تـنـاظـر لـمنـحنـي تـا.

6-4-3- رسـم الـمـنـحـنـي الـمـمـثـل لـلـدالـة :

بـعـد تـعيـيـن الـنقـاط الـهـامـة والـنقـاط الـمسـاعدة عـلـى الـرسـم الـدقـيـق لـلـمنـحنـي ورسـم مـحـور الـتـنـاظـر والـمسـتقيـمات الـمقـاربـة إن وجـدت نـقـوم بـرسـم الـمـنـحـنـي اسـتـعانـة بـجـدول الـتـغـيـرات والـنقـاط الـخـاصـة.

6-4-4- مـراحـل دراسـة دالـة عـدديـة (مـلـخـص) :

1- تـعيـيـن مـجـموعـة الـتـعريف وتـحـديـد حـيـز الـدراسـة بـعـد دراسـة زوجـيـة أو فـرديـة أو دوريـة الـدالـة إذا اقـتـضـى الأمـر.

2 – دراسـة الـنـهـايات عـنـد نـقـاط الانـقـطـاع (عـدم الاسـتـمرار). وعـنـد +∞ وَ −∞ إذا كـان حـيـز الـدراسـة غـيـر مـحـدود.

نـسـتنـتـج الـمسـتقيـمات الـمقـاربـة الأفـقـيـة والـعـموديـة إن وجـدت ونـبـحـث عـن الـمـسـتـقـيـمات الـمقـاربـة الـمائـلـة إذا اقـتـضـى الأمـر .

3 – نـدرس اتـجـاه تـغـيـرات الـدالـة بـواسـطـة الـمشـتق أو بـدونـه، نـحـسـب الـقـيـم الـعظـمـى أو الـصـغـرى إن وجـدت، نـسـجـل نـتـائـج الـدراسة مـع الـنـهـايات فـي جدول الـتـغـيـرات ونـتـحـقق مـن عـدم تـنـاقـضـهـا.

4 – الـمـنـحـنـى :

نـدرس وجـود مـركـز أو مـحـور تـنـاظـر. نـحسـب بـعـض الـقـيـم الـخـاصـة لـلـدالـة نـعلـم كـل الـنـقـاط الـهـامـة والـمسـاعـدة. نـرسـم مـحـور الـتـنـاظـر إذا وجـد والـمـسـتـقيـمات الـمقـاربـة إن وجـدت، ثـم نـرسـم الـمـنـحـنـى مـسـتـعـيـنـيـن فـي ذلـك بـجـدول الـتـغـيـرات.

7 – تمارين التصحيح الذاتي :

7 – 1 – أدرس عند النقاط المذكورة نهايات الدوال العددية المعرفة كما يلي :(ندرس وجود النهايات وقيمتها).

أ) تا(س) = $\dfrac{3س^2+6س+7}{2س^2+3}$ عند $+\infty$ و $-\infty$

ب) ها(س) = $\dfrac{8س^3-27}{4س^2-9}$ عند $+\dfrac{3}{2}$ وعند $+\infty$

جـ) ي(س) = $\sqrt{س^2+س}$ – س +1 عند $+\infty$

د) ك(س) = $\dfrac{س}{\sqrt{س^2+1}-1}$ عند 0

هـ) ل(س) = $\dfrac{\sqrt{س+2}-2}{\sqrt{س+7}-3}$ عند +2

و) م(س) = $\dfrac{جب\ س - جب\ أ}{س-أ}$ عند أ حيث أ ∋ ح .

7 –2 – أدرس استمرارية الدالة تا المعرفة كما يلي في ح .

$$تا(س) = \begin{cases} 6س^2+س+1 & \text{إذا كان } س \in \left]-\infty ، \dfrac{1}{6}\right] \\ \dfrac{6س+3}{2س+5} & \text{إذا كان } س \in \left]\dfrac{1}{6} ، +\infty\right[\end{cases}$$

7 – 3 – أحسب المشتق الأول للدالة تا في كل من الحالات التالية :

أ) تا(س) = $(3س^2 - 5س + 2)^3$.   ب) تا(س) = $\dfrac{3}{س^7}$.

جـ) $تا(س) = \frac{-2س+3}{3س-1}$ د) $تا(س) = \frac{س^3-س^2}{4-س}$.

هـ) $تا(س) = \sqrt{س^2-4س+3}$ و) $تا(س) = \sqrt{\frac{1-س}{1+س}}$.

ي) $تا(س) = \left(تجب\ س\right)^5$.   ل) $تا(س) = ظل\left(\frac{1-س}{1+س}\right)$.

7 - 4 - تعطى الدالة تا : ح ← ح حيث $تا(س) = \frac{-س+1}{\sqrt{س^2-2س+5}}$

وليكن (كـ) المنحنى الذي يمثلها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(م ، \vec{و} ، \vec{ي}\right)$

أ) أدرس تغيرات الدالة تا.

ب) بين أن النقطة ω (1 ، 0) هي مركز تناظر ونقطة إنعطاف لِـ (كـ).

جـ) بين أن تا تقبل دالة عكسية $تا^{-1}$ يطلب تحديد مجال تعريفها.

د) أرسم (كـ). (طول شعاع الوحدة = 2 سم)

8 - الأجوبة :

8 - 1 - دراسة **النهايات** :

أ) باستعمال النظرية على نهايات الدوال الناطقة عند ± ∞، نجد :

$$\lim_{س \to +\infty} \frac{3س^2+6س+7}{2س^2+3} = \lim_{س \to +\infty} \frac{3س^2}{2س^2} = \frac{3}{2}.$$

$$\lim_{س \to -\infty} \frac{3س^2+6س+7}{2س^2+3} = \lim_{س \to -\infty} \frac{3س^2}{2س^2} = \frac{3}{2}.$$

ب) باستعمال نفس النظرية نجد :

$$\lim_{س \to +\infty} \frac{8س^3-27}{4س^2-9} = \lim_{س \to +\infty} \frac{8س^3}{4س^2} = \lim_{س \to +\infty} 2س = +\infty.$$

النهاية عند + $\frac{3}{2}$ هي حالة عدم التعيين.

(البسط والمقام يؤولان إلى الصفر معاً)

نزيل حالة عدم التعيين بالتحليل والاختزال :

من أجل $س \neq \frac{3}{2}$:

$$ها(س) = \frac{8س^3-27}{4س^2-9} = \frac{(2س-3)(4س^2+6س+9)}{(2س-3)(2س+3)} = \frac{4س^2+6س+9}{(2س+3)}$$

ومنه :

$$\lim_{س \to \frac{3}{2}} ها(س) = \lim_{س \to \frac{3}{2}} \frac{4س^2+6س+9}{(2س+3)} = \frac{4\left(\frac{3}{2}\right)^2+6\left(\frac{3}{2}\right)+9}{2\left(\frac{3}{2}\right)+3} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}.$$

جـ) نها ي (س) عند $+\infty$ تظهر على شكل "$\infty - \infty$". (من حالات عدم التعيين).

وعليه يستلزم تحويل يضمن لنا إزالة حالة عدم التعيين.

الدالة ي معرفة على المجالين : $]-\infty ، -1]$ وَ $[0 ، +\infty[$

العبارة المرافقة $\sqrt{س^2+س} + (س-1)$ معرفة على نفس المجالين. في المجال $]0 ، +\infty[$ يمكن أن نكتب :

$$ي(س) = \sqrt{س^2+س} - س + 1 = \sqrt{س^2+س} - (س-1)$$

$$= \frac{\left[\sqrt{س^2+س} - (س-1)\right]\left[\sqrt{س^2+س} + (س-1)\right]}{\sqrt{س^2+س} + (س-1)} = \frac{(س^2+س) - (س-1)^2}{\sqrt{س^2+س} + (س-1)}$$

$$= \frac{س^2+س-س^2+2س-1}{\sqrt{س^2+س} + س - 1} = \frac{3س-1}{\sqrt{س^2+س} + س - 1}$$

$$\lim_{س \to +\infty} ي(س) = \lim_{س \to +\infty} \frac{3س-1}{\sqrt{س^2+س} + س - 1}$$

لكن هذه النهاية الأخيرة تمثل حالة من حالات عدم التعيين (البسط والمقام يؤولان معاً إلى∞) لنخرج س عاملاً مشتركاً في البسط والمقام :

$$\lim_{س \to +\infty} ي(س) = \lim_{س \to +\infty} \frac{س\left(3-\frac{1}{س}\right)}{س\left[\sqrt{1+\frac{1}{س}}+1-\frac{1}{س}\right]} = \lim_{س \to +\infty} \frac{3-\frac{1}{س}}{\sqrt{1+\frac{1}{س}}+1-\frac{1}{س}} = \frac{3}{2}.$$

د) $\lim_{س \to 0} ك(س)$ هي حالة عدم التعيين (البسط والمقام يؤولان معاً إلى الصفر).

ووجود الجذر يؤدي بنا إلى ضرب كل من البسط والمقام في المقدار $\sqrt{س^2+س} + 1$ الذي هو معرف في ح :

ك (س) معرفة في ح* وفي هذا المجال لدينا :

$$ك(س) = \frac{س\left(\sqrt{س^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{س^2+1}-1\right)\left(\sqrt{س^2+1}+1\right)} = \frac{س\left(\sqrt{س^2+1}+1\right)}{\left(س^2+1\right)-1}.$$

$$ك(س) = \frac{س\left(\sqrt{س^2+1}+1\right)}{س^2} = \frac{\sqrt{س^2+1}+1}{س}$$

عـنـدمـا يـؤول س إلـى الـصـفـر، يـؤول الـبـسـط $\sqrt{س^2+1}+1$ إلـى 2 ويـؤول الـمـقـام س إلـى صـفـر.

أي :

$$\lim_{س\to 0} \sqrt{س^2+س}+1 = 2 \quad و \quad \lim_{س\to 0^+} س = 0^+ \quad و \quad \lim_{س\to 0^-} س = 0^-$$

$$\lim_{س\to 0^+} ك(س) = +\infty \quad و \quad \lim_{س\to 0^-} ك(س) = -\infty$$

هـ) نـهـا ل (س) هـي حـالـة عـدم الـتـعـيـيـن لأن الـبـسـط والـمـقـام يـؤولان مـعـاً إلـى الـصـفـر ووجـود الـجـذر فـي الـبـسـط والـمـقـام يـفـرض عـلـيـنـا ضـرب الـحـديـن فـي الـمـرافـقـيـن فـيـكـون لـديـنـا فـي مـجـالـي الـتـعـريـف $[-2 ، 2[$ و $]2 ، +\infty[$:

$$ل(س) = \frac{\left(\sqrt{س+2}-2\right)\left(\sqrt{س+7}+3\right)\left(\sqrt{س+2}+2\right)}{\left(\sqrt{س+7}-3\right)\left(\sqrt{س+7}+3\right)\left(\sqrt{س+2}+2\right)}$$

$$= \frac{\left[(س+2)-4\right]\left(\sqrt{س+7}+3\right)}{\left[\sqrt{س+7}-9\right]\left(\sqrt{س+2}+2\right)} = \frac{\sqrt{س+7}+3}{\sqrt{س+2}+2}$$

$$\lim_{س\to 2} ل(س) = \lim_{س\to 2} \frac{\sqrt{س+7}+3}{\sqrt{س+2}+2} = \frac{3+3}{2+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

$\lim_{أ}$ م هـي حـالـة عـدم الـتـعـيـيـن لأن الـبـسـط والـمـقـام يـؤولان مـعـاً إلـى الـصـفـر. طـريـقـة إزالـة حـالـة عـدم الـتـعـيـيـن تـتـمـثـل فـي الـتـحـلـيـل والإخـتـزال فـي $ح - \{أ\}$.

لـديـنـا :

$$جب\,س - جب\,أ = 2\ جب\,\frac{س-أ}{2}\ تجب\,\frac{س+أ}{2}.$$

$$\text{وَم (س)} = \frac{2\ \text{جب}\frac{\text{س}-\text{أ}}{2}\ \ \text{تجب}\frac{\text{س}+\text{أ}}{2}}{2.\frac{\text{س}-\text{أ}}{2}} = \frac{2}{2}.\frac{\text{جب}\frac{\text{س}-\text{أ}}{2}}{\frac{\text{س}-\text{أ}}{2}}.\ \ \text{تجب}\frac{\text{س}+\text{أ}}{2}$$

لما $\text{س} \leftarrow \text{أ}$

$$\frac{\text{س}-\text{أ}}{2} \leftarrow 0 \ \text{وَ}\ \ \frac{\text{جب}\frac{\text{س}-\text{أ}}{2}}{\frac{\text{س}-\text{أ}}{2}} \leftarrow 1 \ \text{وَ}\ \ \text{تجب}\frac{\text{س}+\text{أ}}{2} \leftarrow \text{تجب أ}$$

ومنه $\lim_{\text{س}\leftarrow\text{أ}} \text{م(س)} = 1.1.$ تجب أ $=$ تجب أ.

8 - 2 - الاستمرارية :

تا معرفة بواسطة عبارتين مختلفين حسب المجال. تتم إذن دراسة إستمرارية تا في كل مجال على جهة وفي النقطة الفاصلة بينهما :

* الدالة تا_1 : س $\mapsto$ 6س^2+س+1 من ح إلى ح مستمرة على ح نظراً لكونها كثير حدود وبالتالي فإنها مستمرة على المجال $]-\infty\ ،\ \frac{1}{6}]$

وبما أن تا(س) = تا_1(س) في هذا المجال فتكون تا مستمرة على $]-\infty\ ،\ \frac{1}{6}]$

*الدالة تا_2 : س $\mapsto \frac{6\text{س}+3}{2\text{س}+5}$ المعرفة في ح $- \left\{-\frac{5}{2}\right\}$

مستمرة في كل من المجالين كدالة ناطقة معرفة فيهما.

وبما أن :

$]\frac{1}{6}،+\infty[\subset$ ح $- \left\{-\frac{5}{2}\right\}$ فإن تا_2 وَ تا مستمرتان على $]\frac{1}{6}،+\infty[$

* دراسة إستمرارية تا عند النقطة $\frac{1}{6}$ تتم بحساب النهايتين من اليمين ومن اليسار ومقارنتهما بقيمة تا عند $\frac{1}{6}$:

$$\text{تا}\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{6\left(\frac{1}{6}\right) + 3}{2\left(\frac{1}{6}\right) + 5} = \frac{4}{\frac{16}{3}} = 4 \times \frac{3}{16} = \frac{3}{4}.$$

$$\lim_{\text{س} \to \frac{1}{6}^{>}} \text{تا}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to \frac{1}{6}^{>}} \text{تا}_1(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to \frac{1}{6}^{>}} \left(6\text{س}^2 + \text{س} + 1\right)$$

$$= 6\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} + 1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{6}{6} = \frac{4}{3}$$

و $\frac{4}{3} \neq \frac{3}{4}$

إذن $\lim_{\frac{1}{6}^{-}} \text{تا} \neq \text{تا}\left(\frac{1}{6}\right)$ وبالتالي تا ليست مستمرة عند النقطة $\frac{1}{6}$ من اليسار.

لكن $\lim_{\frac{1}{6}^{+}} \text{تا} = \text{تا}\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{3}{4}$ إذن تا مستمرة من اليمين فقط عند $\frac{1}{6}$

8 – 3 – حساب المشتقات :

أ) $\text{تا}(\text{س}) = \left(3\text{س}^2 - 5\text{س} + 2\right)^3$. لدينا عبارة من الشكل $\text{ي}^{\text{ن}}$ التي لها مشتق من الشكل : $\text{ن ي}^{\text{ن}-1}$. يَ لنطبق الدستور:

من أجل س $\in$ ح : $\text{تاَ}(\text{س}) = 3\left(3\text{س}^2 - 5\text{س} + 2\right)^2 . \left(3\text{س}^2 - 5\text{س} + 2\right)'$

$$= 3\left(3\text{س}^2 - 5\text{س} + 2\right)^2 (6\text{س} - 5)$$

ب) تا (س) من الشكل ك. $\frac{1}{\text{ها}}$ الذي مشتقه هو : $-$ك. $\frac{\text{هاَ}}{(\text{ها})^2}$

ومنه من أجل س $\in$ ح* :

$$\text{تاَ}(\text{س}) = -3 \frac{\left(\text{س}^7\right)'}{\left(\text{س}^7\right)^2} = -3 . \frac{7\text{س}^6}{\text{س}^{14}} = -\frac{21}{\text{س}^8} .$$

*طريقة ثانية :

$$\text{تا}(\text{س}) = \frac{3}{\text{س}^7} = 3 . \text{س}^{-7} \text{ ومنه } \text{تاَ}(\text{س}) = 3\left(\text{س}^{-7}\right)' = 3\,(-7)\,\text{س}^{-8} = -\frac{21}{\text{س}^8}$$

جـ) $\text{تا}(\text{س}) = \frac{-2\text{س}+3}{3\text{س}-1}$ العبارة من الشكل : $\frac{\text{أ س}+\text{ب}}{\text{جـ س}+\text{د}}$ التي مشتقها هو :

$$\frac{\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{د} \end{vmatrix}}{\left(\text{جـ س}+\text{د}\right)^2} = \frac{\text{أ د} - \text{جـ ب}}{\left(\text{جـ س}+\text{د}\right)^2} \text{ ومنه}$$

من أجل $\text{س} \in \text{ح} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$:

$$\text{تا}'(\text{س}) = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{(3\,\text{س} - 1)^2} = \frac{2 - 9}{(3\,\text{س} - 1)^2} = \frac{-7}{(3\text{س} - 1)^2}$$

د) $\text{تا}(\text{س}) = \frac{\text{س}^3 - \text{س}^2}{4 - \text{س}}$ العبارة من الشكل $\frac{\text{تا}}{\text{ها}}$ ومشتقها من الشكل $\frac{\text{ها}.\ \text{تا}' - \text{تا}.\ \text{ها}'}{(\text{ها})^2}$.

لدينا : $\left(\text{س}^3 - \text{س}^2\right)' = 3\text{س}^2 - 2\text{س}$

$(4 - \text{س})' = -1$

من أجل $\text{س} \in \text{ح} - \{4\}$ إذن :

$$\text{تا}'(\text{س}) = \frac{(4 - \text{س})(3\text{س}^2 - 2\text{س}) - (\text{س}^3 - \text{س}^2)(-1)}{(4 - \text{س})^2}$$

$$\text{تا}'(\text{س}) = \frac{-3\text{س}^3 + 14\text{س}^2 - 8\text{س} + (\text{س}^3 - \text{س}^2)}{(4 - \text{س})^2} = \frac{-2\text{س}^3 + 13\text{س}^2 - 8\text{س}}{(4 - \text{س})^2}$$

هـ) $\text{تا}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^2 - 4\text{س} + 3}$ العبارة من الشكل $\sqrt{\text{تا}}$ فمشتقها من الشكل : $\frac{\text{تا}'}{2\sqrt{\text{تا}}}$ وبالتالي :

من أجل $\text{س} \in]-\infty ، 1] \cup [3 ، +\infty[$:

$$\text{تا}'(\text{س}) = \frac{\left(\text{س}^2 - 4\text{س} + 3\right)'}{2\sqrt{\text{س}^2 - 4\text{س} + 3}} = \frac{2\text{س} - 4}{2\sqrt{\text{س}^2 - 4\text{س} + 3}} = \frac{\text{س} - 2}{\sqrt{\text{س}^2 - 4\text{س} + 3}}$$

و) $\text{تا}(\text{س}) = \sqrt{\frac{\text{س} - 1}{\text{س} + 1}}$ تظهر على الشكل $\sqrt{\text{تا}}$ التي لها مشتق من الشكل $\frac{\text{تا}'}{2\sqrt{\text{تا}}}$.

ومنه :

من أجل $\text{س} \in]-1 ، 1]$

$$\text{تا}'(\text{س}) = \left(\frac{\text{س} - 1}{\text{س} + 1}\right)' . \frac{1}{2\sqrt{\frac{\text{س} - 1}{\text{س} + 1}}} = \frac{-2}{(\text{س} + 1)^2} . \frac{1}{2} . \frac{1}{\sqrt{\frac{\text{س} - 1}{\text{س} + 1}}}$$

$$= \frac{1-}{^{2}(\text{س}+1)} \cdot \sqrt{\frac{\text{س}+1}{\text{س}-1}}\ .$$

ي) تــا(س) = (تـجـب س)^{5} تـظـهـر عـلــى الـشـكـل   تـا^{ن} الـذي مـشـتـقـه مـن الـشـكـل

ن   تـا $^{ن-1}$.   تـاَ ومنـه :

من أجل س ∋ ح :

$$\text{تاَ(س)} = 5 \left(\quad \text{تـجـب س}\right)^{4} . \left(\quad \text{تـجـب س}\right)' = 5 \left(\quad \text{تـجـب س}\right)^{4} \left(- \ \text{جـب س}\right)$$

$$= -5 \ \text{جـب س} . \left(\quad \text{تـجـب س}\right)^{4}$$

ل) تــا(س) = ظـل $\left(\frac{\text{س}-1}{\text{س}+1}\right)$. تـا عـلى الـشـكـل : هـاo ي اي تـا(س) على الشكل المركب هـا[ي

(س)] الذي يعطينا مشتقاً من الشكل :

هـاَ [ي (س)] . يَ (س) وبـالـتـالـي :

من أجل س ≠ −1 وَ $\frac{1-\text{س}}{1+\text{س}} \neq \frac{\pi}{2} + \text{ك}\pi$ مـع   ك ∋ ص

$$\text{تـاَ (س)} = \text{ظـلَ} \left(\frac{\text{س}-1}{\text{س}+1}\right) \times \left(\frac{\text{س}-1}{\text{س}+1}\right)'$$

$$= \left[1+ \ \text{ظـل}^{2} \left(\frac{\text{س}-1}{\text{س}+1}\right)\right] \times \frac{2-}{^{2}(\text{س}+1)}\ .$$

8 – 4 – دراسـة الـدالـة :

الـدالـة تـا مـعـرفـة عـنـد الـعـدد س إذا كـان : س ^{2} − 2 س + 5 〉 0

لـنـحـسـب مـمـيـز ثـلاثـي الـحـدود : $\Delta = (-2)^{2} - 4\,(1)(5) = -16$

إذن س ^{2} − 2 س + 5 〉 0 من أجل كل س من ح. وبـالـتـالـي تـا مـعـرفـة عـلـى ح.

$$\lim_{\text{س} \to +\infty} \text{تـا(س)} = \lim_{\text{س} \to +\infty} \frac{\text{س}\left(-1+\frac{1}{\text{س}}\right)}{\text{س}\sqrt{1-\frac{2}{\text{س}}+\frac{5}{\text{س}^{2}}}} = \lim_{\text{س} \to +\infty} \frac{\left(-1+\frac{1}{\text{س}}\right)}{\sqrt{1-\frac{2}{\text{س}}+\frac{5}{\text{س}^{2}}}} = -1$$

$$\underset{\text{س}\to-\infty}{\text{نها}}\ \text{تا}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to-\infty}{\text{نها}} \frac{\text{س}\left(-1+\frac{1}{\text{س}}\right)}{-\text{س}\sqrt{1-\frac{2}{\text{س}}+\frac{5}{\text{س}^2}}} = \underset{\text{س}\to-\infty}{\text{نها}} \frac{-1+\frac{1}{\text{س}}}{-\sqrt{1-\frac{2}{\text{س}}+\frac{5}{\text{س}^2}}} = +1$$

ومن هدا نستنتج أن المستقيمين اللذين معادلتاهما ع = − 1 وَ ع = +1 مستقيمان مقاربان للمنحنى الممثل للدالة تا.

*مشتق تا :

$(-\text{س}+1)' = -1$

$$\left(\sqrt{\text{س}^2-2\text{س}+5}\right)' = \frac{\left(\text{س}^2-2\text{س}+5\right)'}{2\sqrt{\text{س}^2-2\text{س}+5}} = \frac{2\text{س}-2}{2\sqrt{\text{س}^2-2\text{س}+5}} = \frac{\text{س}-1}{\sqrt{\text{س}^2-2\text{س}+5}}$$

ومنه $\text{تا}'(\text{س}) = \dfrac{\left(\sqrt{\text{س}^2-2\text{س}+5}\right)(-1)-(-\text{س}+1)\left(\dfrac{\text{س}-1}{\sqrt{\text{س}^2-2\text{س}+5}}\right)}{\left(\text{س}^2-2\text{س}+5\right)}$

$$= \frac{\left(\text{س}^2-2\text{س}+5\right)(-1)-(-\text{س}+1)(\text{س}-1)}{\left(\text{س}^2-2\text{س}+5\right)\sqrt{\text{س}^2-2\text{س}+5}}$$

$$= \frac{-\text{س}^2+2\text{س}-5+\text{س}^2-2\text{س}+1}{\left(\text{س}^2-2\text{س}+5\right)\sqrt{\text{س}^2-2\text{س}+5}}$$

إذن : $\text{تا}'(\text{س}) = \dfrac{-4}{\left(\text{س}^2-2\text{س}+5\right)\sqrt{\text{س}^2-2\text{س}+5}}$

بما أن المقام موجب في ح فإن المشتق يبقى سالباً في ح ومنه الدالة تا متناقصة تماماً في ح

* جدول التغيرات

س	$-\infty$		$+\infty$
تا(س)	$+1$	↘	-1

ب) تكون النقطة ω (1 ، 0) نقطة الإنعطاف لـِ (كـ) إذا كان المشتق الثاني ينعدم ويغير إشارته عند س = 1.

$$تا''(س) = \left[تا'(س)\right]' = \left[\frac{-4}{\left(س^2-2س+5\right)\sqrt{س^2-2س+5}}\right]'$$

$$= \left[(-4)\left(س^2-2س+5\right)^{-\frac{3}{2}}\right]'$$

$$= (-4)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(س^2-2س+5\right)^{-\frac{5}{2}}\left(س^2-2س+5\right)'$$

$$= 6\left(س^2-2س+5\right)^{-\frac{5}{2}}\left(2س-2\right)$$

$$= 12\left(س^2-2س+5\right)^{-\frac{5}{2}}\left(س-1\right)$$

إشارة المشتق الثاني هي إشارة (س − 1) الذي ينعدم ويغير إشارته عند س = 1 ومنه ω (1 ، 0) نقطة إنعطاف لـِ (كـ).

*تكون النقطة ω (1 ، 0) مركز تناظر لِـ(كـ) إذا وجدت دالة ها فردية بحيث : إذا كان سَ = س − 1 وَ عَ = ع.

ع = تا(س) ⟺ عَ = ها(سَ)

لنعوض س وَ ع بـ سَ وَ عَ :

$$ع = تا(س) \Leftrightarrow ع = \frac{-س+1}{\sqrt{س^2-2س+5}} \Leftrightarrow عَ = \frac{-سَ}{\sqrt{(سَ+1)^2-2(سَ+1)+5}}$$

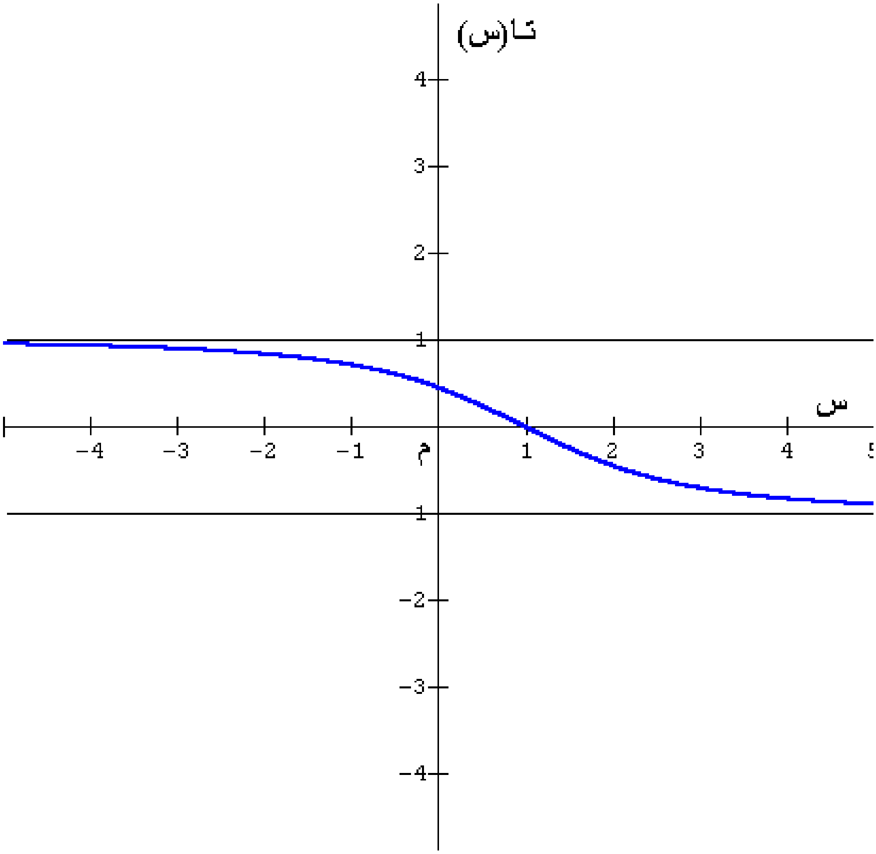
$$\Leftrightarrow عَ = \frac{-سَ}{\sqrt{سَ^2+4}} = ها(سَ).$$

نتحقق بسهولة أن : ها(−س) = − ها(س) ومنهω مركز تناظر.

د) تا متناقصة تماماً في ح ومستمرة (لأنها قابلة للإشتقاق في ح) فهي تقبل دالة عكسية مجال تعريفها هو مجموعة الصور لـِ تا يعني المجال] −1 ، + 1 [.

ج) رسم المحنى : جدول قيم خاصة :

س	1	1/2	0	−1	− 2
تا(س)	0	0.24	0.44	0.7	0.83


تا(س)
4
3
2
1
س
-4
-3
-2
-1
م
1
2
3
4
5
1
-2
-3
-4

فهرس السلسلة السادسة

تتضمن هذه السلسلة درسين هما :

* مبادئ في الهندسة

*مبادئ في التحويلات النقطية

* مبادئ في الهندسة

ملاحظة :هذا الدرس يحتوي على عناصر غير مقررة لتلاميذ شعبة " علوم الطبيعة والحياة ". أما العناصر المقررة فهي : معادلة مستقيم، توازي مستقيمين، الجداء السلمي، شرط تعامد شعاعين ومستقيمين، معادلة دائرة.

الأهداف من الدرس :

*تذكير الطالب بالتعاريف والنتائج الأساسية التي يعتمد عليها في دراسة الهندسة الشعاعية والتآلفية.

*تذكير الطالب بأسس الهندسة التحليلية بواسطة دراسة المعالم والإحداثيات ومعادلات المستقيم والمستوي والتوازي وكذلك دراسة الجداء السلمي وتطبيقاته.

*تزويد الطالب بتتمّات ضرورية في دراسة الزوايا (زوايا الأشعة)، زوايا معينة بمستقيمين أو بنصفي مستقيمين التي تسمح له بمعالجة التحويلات النقطية.

المدة اللازمة لدراسته : 10 ساعات

المراجع الخاصة بهذا الدرس : الكتب المدرسية الخاصة بالهندسة للسنتين الثانية والثالثة ثانوي.

تـصـمـيـم الـدرس

***تـمـهـيـد**

1 - الـفـضـاء الـشـعـاعـي والأشـعـة

2 - المستقيمات والـمستويات في الـمعـالم الـديـكـارتـيـة .

3 - تـتـمات فـي الـزوايـا - الـجداء الـسـلـمـي وتـطـبـيـقـاتـه

تـمـهـيـد :

إنــه مــن الـضــروري، قبل أن يشرع الطالب في دراسة برنامج الهندسة الخاص بالسنة الثالثة ثانوي، أن يُلِمَّ بالمعارف والأدوات الأساسية في الهندسة التي دُرست في السنوات السابقة. في هذا الإطار يُشكل هذا الدرس مراجعة أساسية.
زيادة عن المراجعة يأتي هذا الدرس بتتمات حول الزوايا وهي ضرورية في دراسة التحويلات النقطية بالطرق الهندسية التقليدية.
ونلفت إنتباه الطالب إلى أنه من الضروري أن يتمَكن من المواضيع المقدّمة في هذا الدرس قبل شروعه في دراسة بقية دروس البرنامج مع العلم أن الفقرتين 1 وَ 3 - 1 تخصان الفرع الرياضي خصوصاً.

1 - الـفـضـاء الـشـعـاعـي والأشـعـة :

1 - 1 - بـنـيـة فضاء شعاعي حقيقي :

1 - 1 - 1 - تـعريف :

نقول عن المجموعة **ش** أنها تكون فضاءاً شعاعياً إذا تحققت الشروط التالية :

أ - **ش** مزودة بقانون تركيب داخلي يعطي لِـ ش بنية زمرة تبديلية (نرمز للقانون بالرمز *)

وهذا يعني :

أ$_1$ – القانون * تجميعي :

$\forall$ (ك ، ل ، م) $\in$ **ش**^{3} : (ك * ل) * م = ك * (ل * م).

أ$_2$ – يوجد عنصر حيادي في **ش** (نرمز له $\overleftarrow{0}$).

$\forall$ ك $\in$ **ش** : ك * $\overleftarrow{0}$ = $\overleftarrow{0}$ * ك = ك.

أ$_3$ – لكل عنصر من **ش** عنصر نظير :

($\forall$ ك $\in$ **ش**)، (E كَ $\in$ **ش**) : ك * كَ =كَ * ك = $\overleftarrow{0}$.

أ$_4$ – القانون * تبديلي :

$\forall$ (ك ، ل) $\in$ **ش**^{2} : ك * ل = ل * ك.

ب – في **ش** معرف قانون خارجي من ح × **ش** نحو **ش** بحيث يرفق بكل ثنائية مرتبة (λ ، ك) من ح × **ش** العنصر λ ك أو λ . ك من **ش** والقانون يحقق الشروط التالية :

ب$_1$ – ($\forall \lambda \in$ ح) ($\forall$ ك $\in$ **ش**) ($\forall$ ل$\in$ **ش**) :λ. (ك * ل) = (λ.ك) * (λ.ل)

ب$_2$ – [$\forall$(λ ، μ) $\in$ ح^2] ($\forall$ ك$\in$ **ش**) :(λ + μ). ك = λ.ك + μ.ك

ب$_3$ – [$\forall$(λ ، μ) $\in$ ح^2] ($\forall$ ك$\in$ **ش**) :λ (μ.ك) = (λ.μ).ك

ب$_4$ – ($\forall$ ك$\in$ **ش**) :1. ك = ك حيث 1 $\in$ ح

إن عناصر **ش** تسمى " أشعة " (جمع شعاع) وعناصر ح "سلميات"

ملاحظة :

يرمز عادة للقانون الداخلي برمز الجمع في ح (+) ولَلأشعة بحروف فوقها أسهم.

أمثلة :

1) مجموعة الأشعة المعرفة في الهندسة بواسطة الثنائيات النقطية تكون فضاءاً شعاعياً بالنسبة للجمع الشعاعي (القانون الداخلي) والضرب في عدد حقيقي (القانون الخارجي).

2) مجموعة كثيرات الحدود المعرفة من ح إلى ح بالنسبة إلى جمع كثيرات الحدود (القانون الداخلي) والضرب في عدد حقيقي (القانون الخارجي) تشكل فضاءاً شعاعياً

3) المجموعة ح^2 مزودة بالقانون الداخلي$\oplus$ المعرف كما يلي :

(أ، ب) $\oplus$ (جـ ، د) =(أ +جـ ، ب + د)

وبالضرب في عدد حقيقي المعرف كما يلي :

λ .(أ، ب) = (λ.أ ، λ.ب) لها بنية فضاء شعاعي.

4) كل مجموعة من الشكل ح ^{2} مزودة بالقانونين $\oplus$ وَ (.) المعرفين كما يلي :

$$\left(\text{أ}_1،\text{أ}_2،..،\text{أ}_\text{ن}\right)\oplus\left(\text{ب}_1،\text{ب}_2،..،\text{ب}_\text{ن}\right)=\left(\text{أ}_1+\text{ب}_1،\text{أ}_2+\text{ب}_2،..،\text{أ}_\text{ن}+\text{ب}_\text{ن}\right)$$

$$\lambda\left(\text{أ}_1،\text{أ}_2،..،\text{أ}_\text{ن}\right)=\left(\lambda\text{أ}_1،\lambda\text{أ}_2،..،\lambda\text{أ}_\text{ن}\right)$$

لها بنية فضاء شعاعي حقيقي.

1 – 1 – 2 – نتائج من التعريف :

نستنتج مباشرة من التعريف السابق ما يلي :

مهما كانت العناصر : $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ}}$،. . . من الفضاء الشعاعي **ش** فإن :

*كل عنصر من **ش** إعتيادي يعني :

$$\left(\overleftarrow{\text{أ}}+\overleftarrow{\text{جـ}}=\overleftarrow{\text{ب}}+\overleftarrow{\text{جـ}}\right)\Leftrightarrow\left(\overleftarrow{\text{أ}}=\overleftarrow{\text{ب}}\right)$$

*مهما كان $\left(\overleftarrow{\text{أ}}،\overleftarrow{\text{ب}}\right)$ في **ش** ^{2} يوجد عنصر $\overleftarrow{\text{ف}}$ وحيد بحيث : $\overleftarrow{\text{أ}}+\overleftarrow{\text{ف}}=\overleftarrow{\text{ب}}$. يسمى

$\overleftarrow{\text{ف}}$ فرق الشعاعين $\overleftarrow{\text{أ}}$ و $\overleftarrow{\text{ب}}$ ونكتب $\overleftarrow{\text{ف}}=\overleftarrow{\text{أ}}-\overleftarrow{\text{ب}}$

(كلا الخاصتين تنتجان عن بنية الزمرة التبديلية)

*$0 . \overleftarrow{\text{أ}}=\overleftarrow{0}$ حيث $0 \in$ ح وَ $\overleftarrow{\text{أ}} \in$ ش

$\lambda.\overleftarrow{0}=\overleftarrow{0}$ مهما كان λ في ح

$\lambda.\overleftarrow{\text{أ}}=\overleftarrow{0} \Leftrightarrow \lambda=0$ أو $\overleftarrow{\text{أ}}=\overleftarrow{0}$

تنتج هذه الخواص من خواص القانون الخارجي. (لنبرهن على سبيل المثال صحة الخاصية الأخيرة)

نفرض أن $\lambda.\overleftarrow{\text{أ}}=\overleftarrow{0}$

إما : $\lambda=0$ والنتيجة محققة.

إما : $\lambda\neq0$ ، يوجد إذن مقلوب λ وهو $\frac{1}{\lambda}$ فيكون لدينا :

$\frac{1}{\lambda}\left(\lambda\overleftarrow{\text{أ}}\right)=\frac{1}{\lambda}.\overleftarrow{0}$ أي $\frac{1}{\lambda}\left(\lambda\overleftarrow{\text{أ}}\right)=\overleftarrow{0}$ أي $\left(\frac{1}{\lambda}.\lambda\right)\overleftarrow{\text{أ}}=\overleftarrow{0}$ يعني $1.\overleftarrow{\text{أ}}=\overleftarrow{0}$

يعني $\overleftarrow{أ} = \overleftarrow{0}$. إذن إما $\lambda = 0$ إما $\overleftarrow{أ} = \overleftarrow{0}$

*$(-1).\overleftarrow{أ}$ هو نظير الشعاع $\overleftarrow{أ}$ وَ نرمز له بِـ : $-\overleftarrow{أ}$

البرهان :

$$(-1)\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{أ} = (-1).\overleftarrow{أ} + 1.\overleftarrow{أ} = [(-1) + (+1)].\overleftarrow{أ} = 0.\overleftarrow{أ} = \overleftarrow{0}$$

1 – 1 – 3 – الفضاء الشعاعي الجزئي :

إذا كان **ق** جزءاً من فضاء شعاعي **ش**، نقول أنه فضاء شعاعي جزئي إذا كان يُشكل فضاءاً شعاعياً بالنسبة إلى القانونين المعرفين في **ش**.

1 – 2 – جمل من الأشعة :

1 – 2 – 1 – عبارة خطية من الأشعة :

تعريف :

كل شعاع من الشكل : $\overleftarrow{ي} = \lambda_1 . \overleftarrow{ي}_1 + \lambda_2 . \overleftarrow{ي}_2 + \dots + \lambda_ن . \overleftarrow{ي}_ن$

حيث λ_1، λ_2، . . . . ، $\lambda_ن$ أعداد حقيقية، يسمى عبارة خطية من الأشعة $\overleftarrow{ي}_1$ ، $\overleftarrow{ي}_2$، . . . . ، $\overleftarrow{ي}_ن$.

مثال :

$\overleftarrow{و} + \overleftarrow{ي}$ ، $3\overleftarrow{و} - 2\overleftarrow{ي}$ ، $0\overleftarrow{و} + 0\overleftarrow{ي}$ هي عبارات خطية من الشعاعين $\overleftarrow{و}$ وَ $\overleftarrow{ي}$

1 – 2 – 2 – العائلة المُولّدة من الأشعة :

نقول عن عائلة (أي مجموعة جزئية) من الأشعة أنها مولِّدة للفضاء الشعاعي **ش** إذا كانت مجموعة العبارات الخطية من أشعة العائلة تساوي **ش** وحسب تعريف تساوي مجموعتين هذا يعني أن :

كل عبارة خطية لأشعة العائلة هي عنصر من **ش** وكل عنصر من **ش** يكتب على شكل عبارة خطية من أشعة العائلة.

مثال

في ح ^{2} المزودة بالقانونين المعرفين سابقا الشعاعان (1 ، 0) ، (0 ، 1) يكونان عائلة مولِّدة لأن :

$\forall$ (أ ، ب)$\in$ ح^2 : (أ ، ب) = أ . (1 ، 0) $\oplus$ ب. (0 ، 1).

1 –2 – 3 – عائلة الأشعة المستقلة خطياً :

نقول عن عائلة من الأشعة أنها مستقلة خطياً إذا كانت لا توجد عبارة خطية لأشعة العائلة معدومة سوى التي معاملاتها كلها معدومة.

أي بتعبير آخر

العائلة :ع = {ي$_1$ ، ي$_2$،. . . . ، ي$_ن$} تكون مستقلة خطياً إذا وفقط إذا كان :

$\forall(\lambda_1 ، \lambda_2 ، . . . . ، \lambda_ن)\in$ ح^ن :

$$\lambda_1 . \overleftarrow{ي}_1 + \lambda_2 . \overleftarrow{ي}_2 + ... + \lambda_ن . \overleftarrow{ي}_ن = \overleftarrow{0} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ ---- \\ ---- \\ \lambda_ن = 0 \end{cases}$$

نقول عن عائلة شعاعية أنها مرتبطة خطياً إذا لم تكن مستقلة خطياً ونستنتج من التعريف السابق :

نقول عن عائلة شعاعية أنها مرتبطة خطياً إذا وجدت عبارة خطية معدومة من أشعة العائلة لا تكون جميع معاملاتها معدومة.

أمثلة :

1 – كل عائلة يوجد فيها الشعاع المعدوم مرتبطة خطياً لأن : 1 . $\overleftarrow{0}$ = $\overleftarrow{0}$ مع 1 $\neq$ 0

2 – العائلة : { (1،0،0) ، (1،1،0) ، (1،1،1) } مستقلة خطياً في ح^3 لأن

مهما كان λ_1 ، λ_2 ، λ_3 في ح فإن :

$$\lambda_1(1،0،0) \oplus \lambda_2(1،1،0) \oplus \lambda_3(1،1،1) = \overleftarrow{0}$$ يستلزم

$$(\lambda_1 ، 0، 0) \oplus (\lambda_2 ، \lambda_2 ، 0) \oplus (\lambda_3 ، \lambda_3 ، \lambda_3) = (0 ، 0 ، 0)$$

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0 \\ \text{وَ} \\ \lambda_2+\lambda_3=0 \\ \text{وَ} \\ \lambda_3=0 \end{array}\right\} \text{ يعني } (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 ، \lambda_2+\lambda_3 ، \lambda_3)=(0 ، 0 ، 0)$$

وهذا يستلزم $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$

3 - العائلة $\{(\sqrt{2} ، -1) ، (-2 ، +\sqrt{2})\}$ عائلة مرتبطة خطياً في ج^{2} لأن :

$$\sqrt{2}(\sqrt{2} ، -1)\oplus(-2 ، +\sqrt{2}) \quad (2 ، -\sqrt{2})\oplus(-2 ، +\sqrt{2})=(2-2 ، -\sqrt{2}+\sqrt{2})=(0،0)=$$

1 - 3 - أساس فضاء شعاعي :

1 - 3 - 1 - تعريف

نسمي أساساً للفضاء الشعاعي الحقيقي **ش** كل عائلة من أشعة **ش** تكون مستقلة خطياً ومّولدة لِ **ش**.

أمثلة :

1 - العائلة { (0،0،1) ، (0،1،0) ، (1،0،0)} مستقلة خطيا ومولدة لِ : ج^{3} فهي إذن أساس للفضاء الشعاعي ج^{3}

(تحقق من ذلك).

2 - العائلة {(1، 1) ، (1،−1)} مستقلة خطيا ومولدة لِ : ج^{2} فهي أساس لِ ج^{2} . (تحقق من ذلك).

3 - العائلة { ($\sqrt{2}$ ،−1)، (−2 ، +$\sqrt{2}$)} لا تكون أساساً في ج^{2} لأنها مرتبطة خطياً.

4 - العائلة { (0،0،1) ، (0،1،0)} لا تكون أساساً لِ ج^{3} لأنها لا تولد ج^{3} (بين مثلاً أنه لا توجد أي عبارة خطية من هذين الشعاعين تساوي الشعاع (0 ، 0 ، 1)).

*** ملاحظة :**

المصطلح "أساس" يدل عادة على أساس مرتب يعني متتالية من الأشعة ونكتب الأساس على شكل متتالية . مثلاً : $\left(\overleftarrow{\text{و}} ، \overleftarrow{\text{ي}} ، \overleftarrow{\text{ك}}\right)$

1 – 3 – 2 نظرية :

> كل شعاع من فضاء شعاعي **ش** يُكتب بصفة وحيدة كعبارة خطية من أشعة أساس **ش**.

..البرهان :

1) بما أن الأساس ع عائلة مولِدة لـِ **ش** فإن كل شعاع من **ش** يكتب على شكل عبارة خطية من أشعة ع .

2) لنبرهن أن العبارة الخطية وحيدة : لنفرض أن ع $=\left\{\overleftarrow{\text{ي}}_1 ، \overleftarrow{\text{ي}}_2 ، \overleftarrow{\text{ي}}_3\right\}$ أساس وأنه توجد عبارتان خطيتان تساويان الشعاع $\overleftarrow{\text{ل}}$ مثلاً :

$$\overleftarrow{\text{ل}} = \text{أ}_1\overleftarrow{\text{ي}}_1 + \text{أ}_2\overleftarrow{\text{ي}}_2 + \text{أ}_3\overleftarrow{\text{ي}}_3 = \text{ب}_1\overleftarrow{\text{ي}}_1 + \text{ب}_2\overleftarrow{\text{ي}}_2 + \text{ب}_3\overleftarrow{\text{ي}}_3$$

لدينا $\left(\text{أ}_1\overleftarrow{\text{ي}}_1 + \text{أ}_2\overleftarrow{\text{ي}}_2 + \text{أ}_3\overleftarrow{\text{ي}}_3\right) - \left(\text{ب}_1\overleftarrow{\text{ي}}_1 + \text{ب}_2\overleftarrow{\text{ي}}_2 + \text{ب}_3\overleftarrow{\text{ي}}_3\right) = \overleftarrow{\text{ل}} - \overleftarrow{\text{ل}} = \overleftarrow{0}$

أي : $\left(\text{أ}_1 - \text{ب}_1\right)\overleftarrow{\text{ي}}_1 + \left(\text{أ}_2 - \text{ب}_2\right)\overleftarrow{\text{ي}}_2 + \left(\text{أ}_3 - \text{ب}_3\right)\overleftarrow{\text{ي}}_3 = \overleftarrow{0}$

وبما أن العائلة $\left(\overleftarrow{\text{ي}}_1 ، \overleftarrow{\text{ي}}_2 ، \overleftarrow{\text{ي}}_3\right)$ مستقلة خطياً فإن :

$$\text{أ}_1 - \text{ب}_1 = \text{أ}_2 - \text{ب}_2 = \text{أ}_3 - \text{ب}_3 = 0$$

$\text{أ}_1 = \text{ب}_1$ و $\text{أ}_2 = \text{ب}_2$ و $\text{أ}_3 = \text{ب}_3$ ممّا يدل على أن العبارة وحيدة.

1 – 3 – 3 تعريف :

> إذا كانت ع $=\left(\overleftarrow{\text{ي}}_1 ، \overleftarrow{\text{ي}}_2 ، \overleftarrow{\text{ي}}_3 ، . . . ، \overleftarrow{\text{ي}}_{\text{ن}}\right)$ أساساً للفضاء الشعاعي الحقيقي **ش** وإذا كان
>
> $\overleftarrow{\text{ل}} = \text{س}_1\overleftarrow{\text{ي}}_1 + \text{س}_2\overleftarrow{\text{ي}}_2 + \ldots\ldots + \text{س}_{\text{ن}}\overleftarrow{\text{ي}}_{\text{ن}}$
>
> فإن الأعداد الحقيقية : $\left(\text{س}_1 ، \text{س}_2 ، . . . ، \text{س}_{\text{ن}}\right)$ تسمى مركبات الشعاع $\overleftarrow{\text{ل}}$ بالنسبة للأساس ع.

1 – 3 – 4 – نظرية وتعريف :

> جميع أسس فضاء شعاعي حقيقي لها نفس عدد العناصر، هذا العدد يُسمى "بُعْد الفضاء الشعاعي ".

نقبل هذه النظرية دون برهان.

أمثلـة :

1) بعد ح^2 هو 2 وبعد ح^3 هو 3 حسب ما سبق.

2) الفضاء الشعاعي الحقيقي لكثيرات الحدود من الدرجة 2 على الأكثر بعده 3 لأن العائلة (1، س، س^2) تُشكّل أساساً لهذا الفضاء.

1 – 3 – 5 – تغيير الأساس :

مسألـة :

إذا كانت ف = $(\overleftarrow{ي}_1 ، \overleftarrow{ي}_2)$ وَ فَ = $(\overleftarrow{ي}'_1 ، \overleftarrow{ي}'_2)$ أساسين لـِ : ح^2 مع العلم أن

$$\overleftarrow{ي}'_1 = أ_1\,\overleftarrow{ي}_1 + ب_1\,\overleftarrow{ي}_2$$

$$\overleftarrow{ي}'_2 = أ_2\,\overleftarrow{ي}_1 + ب_2\,\overleftarrow{ي}_2 .$$

وإذا كان :

$\overleftarrow{ل} = س\,\overleftarrow{ي}_1 + ع\,\overleftarrow{ي}_2$ فما هما المركبتان سَ ، عَ لـِ : $\overleftarrow{ل}$ بالنسبة إلى الأساس فَ ؟

لدينا : $\overleftarrow{ل} = س\,\overleftarrow{ي}_1 + ع\,\overleftarrow{ي}_2$ وَ $\overleftarrow{ل} = سَ\,\overleftarrow{ي}'_1 + عَ\,\overleftarrow{ي}'_2$ ومنه :

$$س\,\overleftarrow{ي}_1 + ع\,\overleftarrow{ي}_2 = سَ\,\overleftarrow{ي}'_1 + عَ\,\overleftarrow{ي}'_2$$

$$= سَ\left(أ_1\,\overleftarrow{ي}_1 + ب_1\,\overleftarrow{ي}_2\right) + عَ\left(أ_2\,\overleftarrow{ي}_1 + ب_2\,\overleftarrow{ي}_2\right)$$

$$= \left(سَ أ_1 + عَ أ_2\right)\overleftarrow{ي}_1 + \left(سَ ب_1 + عَ ب_2\right)\overleftarrow{ي}_2$$

ومنه $س = سَ أ_1 + عَ أ_2$ و $ع = سَ ب_1 + عَ ب_2$

مثـال :

$$أ_1 = 1 \quad و \quad ب_1 = -2 \quad ، \quad أ_2 = -3 \quad و \quad ب_2 = 2$$

إذن : $\overleftarrow{ي}'_1 \begin{pmatrix} أ_1 \\ ب_1 \end{pmatrix}$ أي $\overleftarrow{ي}'_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ، $\overleftarrow{ي}'_2 \begin{pmatrix} أ_2 \\ ب_2 \end{pmatrix}$ أي $\overleftarrow{ي}'_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

ينتج منه : $\begin{cases} س = سَ - 3\,عَ \\ ع = -2\,سَ + 2\,عَ \end{cases}$ وبعد حل الجملة نجد :

$$\text{س}' = \frac{\begin{vmatrix} \text{س} & -3 \\ \text{ع} & +2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & +2 \end{vmatrix}} = \frac{2\text{س}+3\text{ع}}{-4} = -\frac{\text{س}}{2} - \frac{3\text{ع}}{4}.$$

$$\text{ع}' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \text{س} \\ -2 & \text{ع} \end{vmatrix}}{-4} = \frac{2\text{س}+\text{ع}}{-4} = -\frac{\text{س}}{2} - \frac{\text{ع}}{4}.$$

1 – 4 – شروط الإستقلال الخطي للأشعة :

1 – 4 – 1 – شروط الإستقلال الخطي في المستوي الشعاعي :

1 – 4 – 1 – 1– المحددات 2 × 2 :

تعريف :

> **ش** فضاء شعاعي بعده 2 وع أساس له .
>
> $\overleftarrow{\text{ك}}$ و $\overleftarrow{\text{ك}'}$ شعاعان من **ش** حيث : $\overleftarrow{\text{ك}}\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ع} \end{pmatrix}$ و $\overleftarrow{\text{ك}'}\begin{pmatrix} \text{س}' \\ \text{ع}' \end{pmatrix}$
>
> نسمي محدد الثنائية $\left(\overleftarrow{\text{ك}} \text{ ، } \overleftarrow{\text{ك}'}\right)$
>
> العدد : س عَ – ع سَ ونرمز له بالرمز : $\begin{vmatrix} \text{س} & \text{س}' \\ \text{ع} & \text{ع}' \end{vmatrix}$.

* **ملاحظة :** المحدد يتغير بتغير الأساس ع .

مثال : $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = (2)\ (5) - (-3)\ (1) = 10 - (-3) = +13.$

1 – 4 – 1 – 2 – شروط إستقلالية شعاعين (مراجعة) :

في مستو شعاعي منسوب إلى أساس $\mathcal{E}$ يكون الشعاعان $\overleftarrow{ك}\begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix}$ و $\overleftarrow{ك'}\begin{pmatrix} س' \\ ع' \end{pmatrix}$ مرتبطين خطيّا (أو

متوازيين) إذا وفقط إذا كان : $\begin{vmatrix} س & س' \\ ع & ع' \end{vmatrix} = 0$ وبأخذ العكس النقيض يكون الشعاعان مستقلين خطيا

إذا وفقط إذا كان : $\begin{vmatrix} س & س' \\ ع & ع' \end{vmatrix} \neq 0$

1 – 4 – 2 – شروط الإستقلال في الفضاء الشعاعي ذو البعد 3 :

1 – 4 – 2 – 1 – شرط إستقلالية شعاعين :

في فضاء شعاعي منسوب إلى أساس معين يكون الشعاعان :

$\overleftarrow{ك}\begin{pmatrix} س \\ ع \\ ص \end{pmatrix}$ و $\overleftarrow{ك'}\begin{pmatrix} س' \\ ع' \\ ص' \end{pmatrix}$ مرتبطين خطيا (أو متوازيين) إذا وفقط إذا كان :

$$\begin{vmatrix} س & س' \\ ع & ع' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ع & ع' \\ ص & ص' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ص & ص' \\ س & س' \end{vmatrix} = 0$$

البرهان :

1 – إذا كان $\overleftarrow{ك}$ و $\overleftarrow{ك'}$ مرتبطين خطياً فإنه يوجد عدد حقيقي λ بحيث $\overleftarrow{ك'} = \lambda \overleftarrow{ك}$. ومنه : $س' = \lambda$ س و $ع' = \lambda$ ع و $ص' = \lambda$ ص وبالتالي :

$\begin{vmatrix} س & س' \\ ع & ع' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} س & \lambda س \\ ع & \lambda ع \end{vmatrix} = \lambda$ س ع – λ س ع = 0 وبنفس الكيفية نجد :

$\begin{vmatrix} ع & ع' \\ ص & ص' \end{vmatrix} = 0$ و $\begin{vmatrix} ص & ص' \\ س & س' \end{vmatrix} = 0$

2 – لنفرض أن س ع' – ع س' = ع ص' – ص ع' = ص س' – س ص' = 0

– إذا كان : س = ع = ص فإن :

$\overleftarrow{ك} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ والعائلة $\{\overleftarrow{ك} ، \overleftarrow{ك َ}\}$ مرتبطة خطياً.

– إذا كان أحد الأعداد س ، ع ، ص غير معدوم ، مثلاً إذا كان س $\neq 0$.

فيوجد عدد حقيقي λ بحيث سَ = λ س ومنه :

س عَ – ع سَ = س عَ – ع (λ س) = س (عَ – λ ع)= 0

وبما أن س $\neq 0$ فإن :

عَ – λ ع = 0 أي عَ = λ ع.

وباستعمال العلاقة : ص سَ – س صَ = 0. نحصل على صَ = λ ص

إذن : $\overleftarrow{ك َ} \begin{pmatrix} \lambda س \\ \lambda ع \\ \lambda ص \end{pmatrix}$ أي $\overleftarrow{ك َ} = \lambda \overleftarrow{ك}$ وبالتالي العائلة $\{\overleftarrow{ك} ، \overleftarrow{ك َ}\}$ مرتبطة خطياً.

ملاحظة :

إذا كان س ، سَ ، ع ، عَ ، ص ، صَ غير معدومة يمكن إستبدال الشرط

$$\begin{vmatrix} س & سَ \\ ع & عَ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ع & عَ \\ ص & صَ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ص & صَ \\ س & سَ \end{vmatrix} = 0$$

بالشرط : $\frac{س}{سَ} = \frac{ع}{عَ} = \frac{ص}{صَ}$.

1 – 4 – 2 – 2 – الأشعة المستقلة خطياً في الفضاء :

تعريف :

$\overleftarrow{ق}$ ، $\overleftarrow{ك}$ ، $\overleftarrow{ل}$ ثلاثة أشعة وَ م ، أ ، ب ، حـ أربع نقط حيث :

$\overleftarrow{ق} = \overline{م أ}$ ، $\overleftarrow{ك} = \overline{م ب}$ ، $\overleftarrow{ل} = \overline{م جـ}$.

نقول عن الأشعة $\overleftarrow{\text{ق}}$ ، $\overleftarrow{\text{ك}}$ ، $\overleftarrow{\text{ل}}$ أنها مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا كانت النقط م،أ، ب، حـ في مستوٍ واحد ، ونقول عن الأشعة $\overleftarrow{\text{ق}}$ ، $\overleftarrow{\text{ك}}$ ، $\overleftarrow{\text{ل}}$ أنها مستقلة خطياً إذا وفقط إذا كانت النقط م، أ، ب، حـ لا تنتمي إلى مستوٍ واحد.

2 – المستقيمات والمستويات في المعلم الديكارتي (مراجعة)

2 – 1 – المعلم الديكارتي في الفضاء :

2 – 1 – 1 – تعريف :

نسمي معلماً ديكارتيا في الفضاء (ف) الرباعية (م، $\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ي}}$ ، $\overleftarrow{\text{ك}}$) حيث م نقطة من الفضاء وَ ($\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ي}}$ ، $\overleftarrow{\text{ك}}$) أساس للفضاء الشعاعي

ملاحظة :

حسب دراسة الفضاءات الشعاعية ($\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ي}}$ ، $\overleftarrow{\text{ك}}$) أساس، معناه أن العائلة $\{\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ي}}$ ، $\overleftarrow{\text{ك}}\}$ مستقلة خطياً (أي أنه لا يوجد فيها شعاع معدوم ولا يكتب أي شعاع منها بدلالة الشعاعين الآخرين) ومولّدة (أي أن كل شعاع يكتب بطريقة وحيدة على شكل عبارة خطية من الأشعة الثلاث).

2 – 1 – 2 – إحداثيات نقطة :

إذا كان (م، $\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ي}}$ ، $\overleftarrow{\text{ك}}$) معلماً في الفضاء (ف) وَ ن نقطة من (ف) حيث :

$\overleftarrow{\text{م ن}}$ = س$\overleftarrow{\text{و}}$ + ع$\overleftarrow{\text{ي}}$ + ص$\overleftarrow{\text{ك}}$. نقول أن الأعداد : س ، ع ، ص تمثل إحداثيات النقطة ن بالنسبة للمعلم (م ، $\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ي}}$ ، $\overleftarrow{\text{ك}}$).تسمى س فاصلة ن ، ع ترتيب ن وَ ص راقم ن ونكتب : ن (س،ع،ص).

2 – 1 – 3 – مركبات الشعاع $\overleftarrow{\text{أب}}$:

في المعلم (م، $\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ي}}$ ، $\overleftarrow{\text{ك}}$) مركبات الشعاع $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ بالنسبة للأساس ($\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ي}}$ ، $\overleftarrow{\text{ك}}$) هي :

$$\begin{pmatrix} س_ب - س_ٲ \\ ع_ب - ع_ٲ \\ ص_ب - ص_ٲ \end{pmatrix}.$$

$(س_ٲ ، ع_ٲ ، ص_ٲ)$ ، $(س_ب ، ع_ب ، ص_ب)$ تمثل إحداثيات النقطتين ٲ و ب .

2 – 1 – 4 – إحداثيات منتصف ثنائية نقطية (أو قطعة مستقيمة) :

إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة [ٲب] هي :

$$س = \frac{1}{2}(س_ٲ + س_ب) ، ع = \frac{1}{2}(ع_ٲ + ع_ب) ، ص = \frac{1}{2}(ص_ٲ + ص_ب)$$

ملاحظات :

(1) في معلم خطي مركبة الثنائية النقطية (ٲ ،ب) هي $(س_ب - س_ٲ)$ وفاصلة منتصفها هي $\frac{1}{2}(س_ٲ + س_ب)$.

(2) في المستوي مركبتا $\overleftarrow{ٲب}$ هما : $(س_ب - س_ٲ)$ وَ $(ع_ب - ع_ٲ)$ وإحداثيا منتصفها هما $\frac{1}{2}(س_ٲ + س_ب)$ وَ $\frac{1}{2}(ع_ٲ + ع_ب)$

2 – 1 – 5 – تغيير المعلم بواسطة انسحاب :

نقول أننا ننتقل من معلم إلى آخر بواسطة إنسحاب إذا كان لهما نفس الأساس ومبدأين مختلفين :

لنفرض وجود معلمين (م، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$ ، $\overleftarrow{ك}$) وَ (مَ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$ ، $\overleftarrow{ك}$) حيث إحداثيات مَ بالنسبة للمعلم الأول هي : $(س_0 ، ع_0 ، ص_0)$ ولتكن ن نقطة من الفضاء إحداثياتها في المعلم الأول والثاني هي : (س ، ع ، ص) وَ (سَ ، عَ ، صَ) على الترتيب.

لدينا : $\overleftarrow{مَ ن} = \overleftarrow{مَ م} + \overleftarrow{م ن} = \overleftarrow{م ن} - \overleftarrow{م مَ}$ ومنه

سَ = س − $س_0$ عَ = ع − $ع_0$ صَ = ص − $ص_0$	أي	س = سَ + $س_0$ ع = عَ + $ع_0$ ص = صَ + $ص_0$

2 – 1 – 6 – تغيير المعلم في الحالة العامة :

لندرس الحالة العامة في المستوي وحالة خاصة في الفضاء.

* ليكن معلمان (م، $\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ي}}$) وَ (مَ ، $\overleftarrow{\text{و}}'$ ، $\overleftarrow{\text{ي}}'$) في المستوي حيث :

إحداثياتا مَ في المعلم الأول هما : س_0 ، ع_0 .

مركباتا $\overleftarrow{\text{و}}'$ في الأساس الأول هما : س_1 ، ع_1 .

مركباتا $\overleftarrow{\text{ي}}'$ في الأساس الأول هما : س_2 ، ع_2 .

إحداثياتا النقطة ن في المعلم الأول هما : س ، ع.

إحداثياتا النقطة ن في المعلم الثاني هما : سَ ، عَ.

لدينا :

$$\overleftarrow{\text{مَ ن}} = \text{سَ}\ \overleftarrow{\text{و}}' + \text{عَ}\ \overleftarrow{\text{ي}}' = \text{سَ}\ (\overleftarrow{\text{و}}\ \text{س}_1 + \text{ع}_1\ \overleftarrow{\text{ي}}) + \text{عَ}\ (\text{س}_2 \overleftarrow{\text{و}} + \text{ع}_2\ \overleftarrow{\text{ي}})$$

$$= (\text{سَ}\text{س}_1 + \text{عَ}\ \text{س}_2)\ \overleftarrow{\text{و}} + (\text{سَ}\ \text{ع}_1 + \text{عَ}\ \text{ع}_2)\ \overleftarrow{\text{ي}}\ \ldots\ldots\ (1)$$

ومن جهة أخرى لدينا : $\overleftarrow{\text{مَ ن}} = \overleftarrow{\text{م ن}} - \overleftarrow{\text{م مَ}}$

$$= (\text{س}\ \overleftarrow{\text{و}} + \text{ع}\ \overleftarrow{\text{ي}}) - (\text{س}_0 \overleftarrow{\text{و}} + \text{ع}_0\ \overleftarrow{\text{ي}})$$

$$= (\text{س} - \text{س}_0)\ \overleftarrow{\text{و}} + (\text{ع} - \text{ع}_0)\ \overleftarrow{\text{ي}}\ \ldots\ldots\ (2)$$

من تساوي العبارتين (1) وَ (2) ينتج لدينا :

$$\text{س} - \text{س}_0 = \text{سَ}\text{س}_1 + \text{عَ}\ \text{س}_2$$

$$\text{ع} - \text{ع}_0 = \text{سَ}\ \text{ع}_1 + \text{عَ}\ \text{ع}_2$$

ونحصل على المجهولين سَ ، عَ بحل الجملة علماً أن س ، س_0 ، س_1 ، س_2 ،ع ، ع_0 ، ع_1 ، ع_2 معاملات معلومة وعلماً أيضاً أن : $\begin{vmatrix} \text{س}_1 & \text{س}_2 \\ \text{ع}_1 & \text{ع}_2 \end{vmatrix} \neq 0$ لأن ($\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ي}}$) أساس.

تغيير المعلم في الفضاء (مثال) :

ليكن معلمان (م ، $\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ي}}$ ، $\overleftarrow{\text{ك}}$) وَ(مَ ، $\overleftarrow{\text{و}}'$ ، $\overleftarrow{\text{ي}}'$ ، $\overleftarrow{\text{ك}}'$) في الفضاء (ف) حيث :

إحداثيات مَ في المعلم الأول هي (1 ، 1 ، 0)

مركبات $\overleftarrow{\text{و}}'$ في الأساس الأول هي (0 ، 1 ، 1)

مركبات $\overleftarrow{\text{ي}}'$ في الأساس الأول هي (1 ، 0 ، –1)

مركبات $\overleftarrow{ك}'$ في الأساس الأول هي (0 ، 2 ، −1)

إحداثيات النقطة ن في المعلم الأول هي (−2 ، −1 ، 0)

إحداثيات النقطة ن في المعلم الثاني هي (سَ، عَ، صَ)

لدينا : $\overleftarrow{مَ ن} = سَ\,\overleftarrow{و}' + عَ\,\overleftarrow{ي}' + صَ\,\overleftarrow{ك}'$

$\overleftarrow{مَ ن}$ = سَ (0. $\overleftarrow{و}$ + $\overleftarrow{ي}$ + $\overleftarrow{ك}$)+عَ ($\overleftarrow{و}$+0 . $\overleftarrow{ي}$ − $\overleftarrow{ك}$) +صَ (0. $\overleftarrow{و}$+2 $\overleftarrow{ي}$ − $\overleftarrow{ك}$)

$\overleftarrow{مَ ن} = عَ\,\overleftarrow{و} + \left(سَ + 2\,صَ\right)\overleftarrow{ي} + \left(سَ - 2\right)\overleftarrow{ك}$ . . . . . (1)

ولدينا كذلك : $\overleftarrow{مَ ن} = \overleftarrow{م ن} - \overleftarrow{م مَ}$

$\overleftarrow{مَ ن} = -2\overleftarrow{و} - \overleftarrow{ي} + 0.\overleftarrow{ك} - \left(\overleftarrow{و} + \overleftarrow{ي}\right)$

$\overleftarrow{مَ ن} = -3\overleftarrow{و} - 2\overleftarrow{ي} + 0.\overleftarrow{ك}$ . . . . . . (2)

وبالتساوي بين العبارتين (1) وَ (2) ينتج :

$$\begin{cases} عَ = -3 \\ سَ + 2\,صَ = -2 \\ سَ - 2 = 0 \end{cases}$$

حل الجملة يعطينا مباشرة : سَ = 2 ، عَ = − 3 ، صَ = −2

2 − 2 − المعادلات الوسيطية للمستقيم والمستوي :

2 − 2 − 1 − المعادلات الوسيطية لمستقيم في المستوي :

ليكن المستوي (π) منسوباً إلى معلم ديكارتي (م، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$) وليكن المستقيم (Δ) في المستوي (π) المعرف بنقطة منه $ن_0$ وشعاع توجيه $\overleftarrow{ق}$

ن ∋ (Δ)⇔ E λ ∋ ح / $\overleftarrow{ن_0 ن}$ = λ . $\overleftarrow{ق}$. وبما أن $\overleftarrow{م ن} = \overleftarrow{م ن_0} + \overleftarrow{ن_0 ن}$

فإن (Δ) = { ن ∋ (π) ،E λ ∋ ح / $\overleftarrow{م ن} = \overleftarrow{م ن_0} + \lambda\,\overleftarrow{ق}$ }

فإذا كان س ، ع إحداثيي ن وَ $س_0$ ، $ع_0$ إحداثيي $ن_0$ وَ أ ، ب مركبتي الشعاع $\overleftarrow{ق}$ يكون

لدينا :
$$\begin{cases} س = س_0 + \lambda أ \\ ع = ع_0 + \lambda ب \end{cases} \quad / \; \lambda \in ح \, .$$

ملاحظة :

العلاقات السابقة تبيِّن لنا أن كل نقطة من المستقيم (Δ) توافقها قيمة للعدد λ.
وبذلك نكون قد عرّفنا تقابلاً بين (Δ) وَ ح .

2 – 2 – 2 المعادلات الوسيطية لمستقيم في الفضاء :

بنفس الطريقة السابقة نحصل على المعادلات التالية :
$$\begin{cases} س = س_0 + \lambda أ \\ ع = ع_0 + \lambda ب \\ ص = ص_0 + \lambda \; جـ \end{cases} \quad / \; \lambda \in ح \, .$$

حيث س، ع ، ص هي إحداثيات النقطة المتغيرة ن من المستقيم (Δ)

$س_0$ ، $ع_0$ ، $ص_0$ هي إحداثيات النقطة الثابتة $ن_0$ من المستقيم (Δ)

أ ، ب ، جـ هي مركبات شعاع التوجيه $\overleftarrow{ق}$.

مثال : أوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم المعرف بالنقطة $ن_0$ (1 ، 2 ،−1) وشعاع التوجيه $\overleftarrow{ق}$ (1، 0 ، 3).

الحل : المعادلات الوسيطية هي :
$$\begin{cases} س = 1 + \lambda \\ ع = 2 \\ ص = -1 + 3\lambda \end{cases} \quad / \; \lambda \in ح$$

2 – 2 – 3 – المعادلات الوسيطية لمستو :

ليكن (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$ ، $\overleftarrow{ك}$) معلماً في الفضاء (ف) ومستو(π) معرف بنقطة منه ن$_0$(س$_0$، ع$_0$، ص$_0$) وبثنائية من أشعة التوجيه $\overleftarrow{ق}$ (أ ، ب ، جـ) ، $\overleftarrow{ق'}$ (أ' ، ب' ، جـ') غير معدومين وغير متوازيين.

لدينا التكافؤ : ن ∍ (π) $\Leftrightarrow$ E (λ ، μ) ∍ ح^2 : $\overleftarrow{ن_0ن} = \lambda$ $\overleftarrow{ق}$ + μ $\overleftarrow{ق'}$

وبما أن : $\overleftarrow{م ن} = \overleftarrow{م ن_0} + \overleftarrow{ن_0 ن}$

فإن :
$$\begin{cases} س = س_0 + \lambda أ + \mu أ' \\ ع = ع_0 + \lambda ب + \mu ب' \\ ص = ص_0 + \lambda جـ + \mu جـ' \end{cases} \quad / \ (\lambda ، \mu) ∍ ح^2 .$$

العلاقات الثلاث تسمى المعادلات الوسيطية للمستوي(π).

تسمح لنا هذه العلاقات بأن نرفق نقطة ن من (π) بكل ثنائية (λ، μ) من ح^2 يعني أنها تعرف تقابلاً بين (π) وَ ح^2.

مثال :

أوجد المعادلات الوسيطية للمستوي المعرف بثلاث نقاط منه :

α (3 ، 0 ، 0) ، β (0 ، 2 ، 0) ، γ (0 ، 0 ، 1).

يمكننا إتخاذ α كنقطة مرجعية، $\overleftarrow{\beta\alpha}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، $\overleftarrow{\gamma\alpha}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ كشعاعي التوجيه للمستوي.

مع الملاحظة أن هذين الشعاعين $\overleftarrow{\beta\alpha}$ وَ $\overleftarrow{\gamma\alpha}$ غير متوازيين وبتطبيق العلاقات السابقة نحصل على ما يلي :

$$\left.\begin{array}{l} س = 3 - 3\lambda - 3\mu \\ ع = 2\lambda \\ ص = \mu \end{array}\right\} \quad / \ (\lambda ، \mu) \in ح^2$$

2 – 3 – المعادلات الديكارتية للمستقيم والمستوي :

2 – 3 – 1 – معادلة مستقيم في المستوي (مراجعة) :

نظرية :

لكل مستقيم من المستوي معادلة من الشكل : أ س + ب ع + جـ = 0.

حيث أ وَ ب لا ينعدمان معاً وكل علاقة من الشكل :

أ س + ب ع + جـ = 0

حيث أ وَ ب غير معدومين معاً معادلة مستقيم شعاع توجيهه هو $\overrightarrow{ق}\begin{pmatrix} -ب \\ أ \end{pmatrix}$.

ملاحظة :

إذا كان ب ≠ 0 أي إذا كان المستقيم لا يقبل الشعاع $\overleftarrow{ي}$ كشعاع توجيه يمكن كتابة المعادلة على الشكل : $ع = -\frac{أ}{ب} س - \frac{جـ}{ب}$

2 – 3 – 2 – معادلة مستو في الفضاء (مراجعة) :

نظرية :

كل مستو له معادلة من الشكل :أ س + ب ع+جـ ص+ د = 0 حيث الأعدادأ ،ب، جـ غير معدومة معاً.

وكل علاقة من الشكل : أ س + ب ع + جـ ص + د = 0 حيث الأعداد أ ، ب ، جـ غير معدومة معاً، هي معادلة مستو يقبل الشعاعين $\overrightarrow{ق}\begin{pmatrix} ب \\ -أ \\ 0 \end{pmatrix}$ وَ $\overrightarrow{ق'}\begin{pmatrix} جـ \\ 0 \\ -أ \end{pmatrix}$ كشعاعي توجيه إذا كان أ ≠ 0.

البرهان : (راجع دروس السنة الثانية).

مثال 1 :

المعادلـة :2 س − 3ع + ص + 1 = 0 هـي معادلة مستو يشمل النقطة (1 ، 1 ، 0) ويقبل الشعاعين

$\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ وَ $\begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ كشعاعي توجيه.

مثـال 2 :

أوجد معادلة المستوي الذي يشمل النقاط الثلاث :

α (1 ، 0 ، 0) ، β (0 ، 2 ، 0) ، γ (0 ، 0 ، 3).

نـعوض في الـمعـادلـة : أس + ب ع + جـ ص + د = 0 : س ، ع ، ص بـإحداثـيـاتα ثـم β ثـم γ فـنـجـد :

$$\begin{cases} أ+د=0 \\ 2ب+د=0 \\ 3\ جـ+د=0 \end{cases}$$ أي أ = 2 ب = 3 جـ = − د

لنأخذ قيمة إختيارية لِـ د ولتكن − 6 فنحصل على :

أ = 2ب = 3جـ = +6. يعني :أ = 6 ، ب = 3 ، جـ= 2 ، د= −6 فـالمعـادلـة هي : 6س + 3ع +2 ص−6 = 0

ملاحظة :

كـل مـسـتـو لـه عـدد غـيـر مـنـتـه من الـمـعـادلات الـمـتـكـافـئـة نـسـتـنـتـج بـعـضـهـا من بـعـض بـالـضـرب فـي مـعـامـل حـقـيـقـي غـيـر مـعـدوم

2 − 4 − شروط التوازي :

2 − 4 − 1 − نظرية :

يكون الشعاع $\overleftarrow{ق}$ $\begin{pmatrix} أ \\ ب \\ جـ \end{pmatrix}$ موازيا للمستوي (π) الذي معادلته :

α س + β ع + γ ص + δ = 0 إذا وفقط إذا كان : α أ + β ب + γ جـ = 0.

البرهان :

ليكن ن $(س_0 ، ع_0 ، ص_0)$ نقطة من المستوي (π). مهما كان $\overleftarrow{ق}$ يمكن إيجاد نقطة من الفضاء ن(س،ع،ص) بحيث: $\overleftarrow{ن_0ن} = \overleftarrow{ق}$ ومنه يكون $\overleftarrow{ق}$ شعاعاً موازياً للمستوي(π) إذا وفقط إذا كانت ن تنتمي إلى (π)

* إذا كان $\overleftarrow{ق}$ شعاع توجيه فإن ن ينتمي إلى (π) ومنه :

$$\alpha\text{ س} + \beta\text{ ع} + \gamma\text{ ص} + \delta = 0 \qquad (1)$$

وبما أن $ن_0$ تنتمي إلى (π) إذن : $\alpha س_0 + \beta ع_0 + \gamma ص_0 + \delta = 0 \quad (2)$

وبطرح (2) من (1) طرف لطرف ينتج :

$$\alpha(س - س_0) + \beta(ع - ع_0) + \gamma(ص - ص_0) = 0$$

يعني : $\alpha\,أ + \beta\,ب + \gamma\,جـ = 0$

* لنفرض الآن أن : $\alpha\,أ + \beta\,ب + \gamma\,جـ = 0$

هذا معناه : $\alpha(س - س_0) + \beta(ع - ع_0) + \gamma(ص - ص_0) = 0$

وبما أن : $\alpha س_0 + \beta ع_0 + \gamma ص_0 + \delta = 0$

وبالجمع طرف إلى طرف نجد : $\alpha\text{ س} + \beta\text{ ع} + \gamma\text{ ص} + \delta = 0$

يعني ن ينتمي إلى (π) ومنه $\overleftarrow{ن_0ن}$ و هو$\overleftarrow{ق}$ شعاع توجيه للمستوي (π).

2 – 4 – 2 – نظرية :

يكون المستقيم المعرف بالمعادلات الوسيطية :

$$\begin{cases} س = س_0 + \lambda أ \\ ع = ع_0 + \lambda ب \\ ص = ص_0 + \lambda جـ \end{cases} \quad / \ \lambda \in ح$$

موازياً للمستوي (π) الذي معادلته : $\alpha\text{ س} + \beta\text{ ع} + \gamma\text{ ص} + \delta = 0$

إذا وفقط إذا كان : $\alpha\,أ + \beta\,ب + \gamma\,جـ = 0$

البرهان : الشرط $\alpha\,أ + \beta\,ب + \gamma\,جـ = 0$ يعني أن الشعاع $\overleftarrow{ق}\begin{pmatrix} أ \\ ب \\ جـ \end{pmatrix}$ موازي للمستوي وهذا معناه أن المستقيم يوازي المستوي.

مثال : (Δ) : $\begin{cases} \text{س} = 3 + 2\lambda \\ \text{ع} = 1 - \lambda \\ \text{ص} = -2 + 3\lambda \end{cases}$ / $\lambda \in$ ح (π) : $5\text{س} - 2\text{ع} - 4\text{ص} + 3 = 0$

لدينا : $5(2) - 2(-1) - 4(+3) = 0$ إذن (Δ) يوازي (π).

2 – 4 – 3 – نظرية :

يكون المستويان (π): $\alpha\text{س} + \beta\text{ع} + \gamma\text{ص} + \delta = 0$

و (π'): $\alpha'\text{س} + \beta'\text{ع} + \gamma'\text{ص} + \delta' = 0$

متوازيين إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\overleftarrow{\text{ق}}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ و $\overleftarrow{\text{ق}'}\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{pmatrix}$ مرتبطين خطياً أي :

$$\begin{vmatrix}\alpha & \alpha'\\ \beta & \beta'\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\beta & \beta'\\ \gamma & \gamma'\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\gamma & \gamma'\\ \alpha & \alpha'\end{vmatrix} = 0$$

البرهان : (أنظر درس الجداء السلمي رقم : 3 – 2 – 2 – 5)

2 – 5 – تقاطع المستقيمات والمستويات :

2 – 5 – 1 – تقاطع مستوين :

نظريـة :

كل جملة معادلتين من الدرجة الأولـى :

$$\begin{cases}\alpha\text{س} + \beta\text{ع} + \gamma\text{ص} + \delta = 0\\ \alpha'\text{س} + \beta'\text{ع} + \gamma'\text{ص} + \delta' = 0\end{cases}$$

تمثل مستقيما شريطة أن يكون الشعاعان $\overleftarrow{\text{ق}}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ و $\overleftarrow{\text{ق}'}\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{pmatrix}$ غير مرتبطين خطياً

البرهان : إذا كان الشعاعان $\vec{ق}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ و $\vec{ق'}\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{pmatrix}$ غير مرتبطين خطياً يكون المستويان اللذان

معادلتيهما :

α س + β ع + γ ص + δ = 0 و α' س + β' ع + γ' ص + δ' = 0 غير متوازيين فهما يعينان مستقيماً وحيداً تمثله جمله المعادلتين.

مثال :

(Δ) : $\begin{cases} 2س - 5ع + ص - 3 = 0 \\ س + 2ع - ص + 1 = 0 \end{cases}$ نتحقق أن المستوين غير متوازيين

ثم نبحث عن المعادلات الوسيطية لـِ (Δ) أي عن شعاع توجيه ونقطة من (Δ). يكون الشعاع $\vec{ق}\begin{pmatrix}أ\\ ب\\ جـ\end{pmatrix}$ شعاع توجيه لـِ (Δ) إذا كان يوازي المستوين يعني إذا كان :

$$\begin{cases} 2أ - 5ب + جـ = 0 & (1) \\ أ + 2ب - جـ = 0 & (2) \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} جـ = -2أ + 5ب \\ جـ = أ + 2ب \end{cases}$$

ومنه أي $\begin{cases} جـ = أ + 2ب \\ أ + 2ب = -2أ + 5ب \end{cases}$ أي $\begin{cases} جـ = أ + 2ب \\ أ = ب \end{cases}$ أي $\begin{cases} جـ = 3أ \\ ب = أ \end{cases}$

إذن $\vec{ق}\begin{pmatrix}\lambda\\ \lambda\\ 3\lambda\end{pmatrix}$ / $(\lambda \in ح)$.

لنبحث عن نقطة $ن_0(س_0 ، ع_0 ، ص_0)$ من (Δ).

نعطي قيمة إختيارية لـِ $ص_0$ $(ص_0 = 0)$ ثم نبحث عن $س_0$ ، $ع_0$:

$$\begin{cases} 2\text{س}_0 - 5\text{ع}_0 - 3 = 0 \\ \text{س}_0 + 2\text{ع}_0 + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{نجد} \quad \text{س}_0 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{9} \quad ، \quad \text{ع}_0 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{9} = -\frac{5}{9}$$

إذن المعادلات الوسيطية لـِ (Δ) هي :

$$\begin{cases} \text{س} = \frac{1}{9} + \lambda \\ \text{ع} = -\frac{5}{9} + \lambda \quad / \quad \lambda \in \text{ح} . \\ \text{ص} = 3\lambda \end{cases}$$

2 – 5 – 2 – تقاطع مستو مع مسقيم معرف بمعادلات وسيطية :

ليكن (Δ) المستقيم المعرف بجملة المعادلات :

$$\begin{cases} \text{س} = \text{س}_0 + \lambda \text{أ} \\ \text{ع} = \text{ع}_0 + \lambda \text{ب} \quad / \quad \lambda \in \text{ح} . \\ \text{ص} = \text{ص}_0 + \lambda \text{ جـ} \end{cases}$$

وليكن (π) المستوي الذي معادلته : α س + β ع + γ ص + δ = 0

إن النقطة ن $(\text{س}_\lambda ، \text{ع}_\lambda ، \text{ص}_\lambda)$ تنتمي إلى (π) إذا كانت إحداثياتها تحقق معادلة (π) أي إذا كان :

$$\alpha(\text{س}_0 - \lambda \text{أ}) + \beta(\text{ع}_0 + \lambda \text{ب}) + \gamma(\text{ص}_0 + \lambda \text{ جـ}) + \delta = 0$$

$$(\alpha \text{ أ} + \beta \text{ ب} + \gamma \text{ جـ})\lambda + \alpha\text{س}_0 + \beta \text{ع}_0 + \gamma \text{ص}_0 + \delta = 0$$

* إذا كان : α أ + β ب + γ جـ $\neq$ 0 (يعني إذا كان : (Δ) لا يوازي (π)) المعادلة تقبل حلاً وحيداً λ وعليه يقتصر التقاطع إلى نقطة وحيدة. نقول في هذه الحالة أن المستقيم يقطع المستوي.

*إذا كان : α أ + β ب + γ جـ = 0 (يعني إذا كان (Δ) // (π))

فإنه لا يوجد حل إذا كان : $\alpha\text{س}_0 + \beta \text{ع}_0 + \gamma \text{ص}_0 + \delta \neq 0$ (يعني $\text{ن}_0 \notin (\pi)$)

ويوجد عدد غير منته من الحلول إذا كان : $\alpha\text{س}_0 + \beta \text{ع}_0 + \gamma \text{ص}_0 + \delta = 0$.

وهذا معناه أن $(\Delta) \subset (\pi)$.

2 -5 -3 - تعيين تقاطع مستو ومستقيم بواسطة المعادلات الديكارتية :

إذا كان (Δ) معيناً بالمعادلتين : $\begin{cases} \alpha'\text{س} + \beta'\text{ع} + \gamma'\text{ص} + \delta' = 0 \\ \alpha''\text{س} + \beta''\text{ع} + \gamma''\text{ص} + \delta'' = 0 \end{cases}$

وَ (π) مستويا معينا بالمعادلة : $\alpha\,\text{س} + \beta\,\text{ع} + \gamma\,\text{ص} + \delta = 0$

فـإن مجموعـة نقـاط التقاطع هي مجموعة النقاط ن (س، ع،ص) حيث (س،ع، ص) هي حل من حلول

الجملة : $\begin{cases} \alpha\text{س} + \beta\text{ع} + \gamma\text{ص} + \delta = 0 \\ \alpha'\text{س} + \beta'\text{ع} + \gamma'\text{ص} + \delta' = 0 \\ \alpha''\text{س} + \beta''\text{ع} + \gamma''\text{ص} + \delta'' = 0 \end{cases}$

مثال : (Δ) : $\begin{cases} \text{س} - \text{ع} + 2\text{ص} + 1 = 0 \ldots (1) \\ 2\text{س} + \text{ع} - \text{ص} - 3 = 0 \ldots (2) \end{cases}$ (π) : $3\,\text{س} + 2\text{ع} - \text{ص} = 0 \ldots (3)$

لنحل الجملة $\begin{cases} \text{س} - \text{ع} + 2\text{ص} + 1 = 0 \ldots (1) \\ 2\text{س} + \text{ع} - \text{ص} - 3 = 0 \ldots (2) \\ 3\text{س} + 2\text{ع} - \text{ص} = 0 \ldots (3) \end{cases}$

(3) − (2) تعطي : $\text{س} + \text{ع} + 3 = 0$ (1)

(1) + 2 (2) تعطي : $5\,\text{س} + \text{ع} - 5 = 0$ (2)

وبطرح (1) من (2) نحصل على : $4\,\text{س} - 8 = 0$

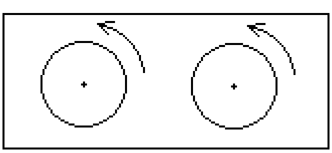
ومنه : س = 2 ، ع = −5 ، ص = −4.

إذن (Δ) يقطع (π) في النقطة ن (2 ، −5 ، −4).

3 - تتمـات في الزوايا والجداء السلمي وتطبيقاته :

3 - 1 - تتمات في الزوايا :

3 - 1 - 1 - الزاوية الموجهة لنصفي مستقيمين :

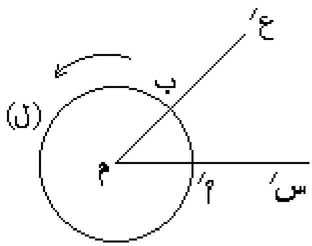


نقول أن المستوي موجه إذا إخترنا نفس الإتجاه

الموجب على جميع دوائر هذا المستوي

* إذا كـان [أ س) وَ [ب ع) نصفي مستقيمين للمستوي الموجـه فإن الثنـائيـة ([أس) ، [ب ع)) تعين زاوية موجهة نرمز لها بالرمز (أس ، ب ع) وَ [ب ع) هو الضلع الثاني لها.

* لتكن (أس ، ب ع) زاوية موجهة من المستوي الموجه. لننشيء في هذا المستوي دائرة (د) مركزها م ثم لننشـيء نصفي المستقيمين [م سَ) وَ [م عَ) كما يلي :



[م سَ) وَ [أ س) متوازيان ولهما نفس الإتجاه

[م عَ) وَ[ب ع) متوازيان ولهما نفس الإتجاه.

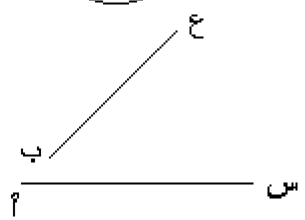
نضع : [م سَ) ∩ (د) = {أَ}.

وَ [م عَ) ∩ (دَ) = {بَ}

نسـمي قيسـا للـزاوية الموجهة (أ س، ب ع) كل قيس للقوس الموجه أَبَ

ونـكـتـب :

قيس (أ س ، ب ع) = $\left(\overline{\text{أ س ، ب ع}}\right)$



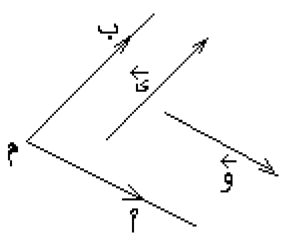
3 – 2 – 1 – الزاوية الموجهة لشعاعين :

$\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$ شعاعان غير معدومين من المستوي الموجه.

م نقطة من هذا المستوي.

$\overline{مأ}$ ممثل للشعاع $\overleftarrow{و}$

$\overline{مب}$ ممثل للشعاع $\overleftarrow{ي}$



بالتعريف الزاوية الموجهة للشعاعين

$\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$ التي نرمز إليها بالرمز ($\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$)

هي الزاوية الموجهة (م أ ، م ب)

لنصفي المستقيمين [م أ) ، [م ب).

3 – 1 – 3 – خواص زوايا الأشعة :

مهما كانت الأشعة $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$ ، $\overleftarrow{هـ}$ من نفس المستوي الشعاعي لدينا الخواص التالية :

1 – ($\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{و}$) ≡ 0 $[2\pi]$

2 – $(\overleftarrow{و} ، -\overleftarrow{و}) \equiv \pi$ $[2\pi]$ (نتيجة من التعريف)

3 – $(\overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ي}) + (\overleftarrow{ي} ، \overleftarrow{هـ}) \equiv (\overleftarrow{و} ، \overleftarrow{هـ})$ $[2\pi]$. (علاقة شال)

4 – $(\overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ي}) + (\overleftarrow{ي} ، \overleftarrow{و}) \equiv 0$ $[2\pi]$

5 – $(\overleftarrow{و} ، -\overleftarrow{ي}) \equiv (\overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ي}) + \pi$ $[2\pi]$

6 – $(-\overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ي}) \equiv (\overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ي}) + \pi$ $[2\pi]$

7 – $(-\overleftarrow{و} ، -\overleftarrow{ي}) \equiv (\overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ي})$ $[2\pi]$

8 – $(ك\overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ي}) \equiv (\overleftarrow{و} ، ك\overleftarrow{ي}) \equiv (\overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ي})$ $[2\pi]$ إذا كان : $ك \in ح^*_+$

9 – $(ك\overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ي}) \equiv (\overleftarrow{و} ، ك\overleftarrow{ي}) \equiv (\overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ي}) + \pi$ $[2\pi]$ إذا كان : $ك \in ح^*_-$.

10 – $(ك\overleftarrow{و} ، ل\overleftarrow{ي}) \equiv (\overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ي})$ $[2\pi]$ إذا كان : $ك ل > 0$

11 – $(ك\overleftarrow{و} ، ل\overleftarrow{ي}) \equiv (-\overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ي}) \equiv (\overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ي}) + \pi$ $[2\pi]$ إذا كان : $ك ل < 0$.

البرهان : (1) وَ (2) تُستنتج من التعريف.

3) علاقة شال للزوايا الشعاعية تُستنتج من نفس العلاقة لزوايا أنصاف المستقيم.

4) إلى (11) نتيجة التعريف وعلاقة شال .

3 – 1 – 4 – زوايا المستقيمات :

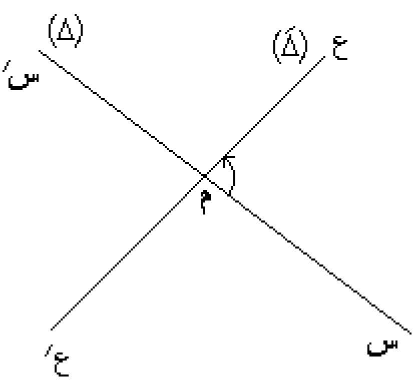
لكن مستقيمان (Δ) وَ (Δ') متقاطعان في م. نسمي [م س، [م سَ نصفي المستقيم (Δ) وَ[م ع ، [م عَ نصفي المستقيم (Δ')

نضع $\overline{\left[م س ، م ع \right]} \equiv \theta$ $[2\pi]$

لدينا $\overline{\left[م س ، م عَ \right]} \equiv \theta + \pi$ $[2\pi]$

$\overline{\left[م سَ ، م عَ \right]} \equiv \theta$ $[2\pi]$

$\overline{\left[م سَ ، م ع \right]} \equiv \theta + \pi$ $[2\pi]$



إذن قيس كل زاوية ضلعها الأول هو نصف مستقيم من (Δ) وضلعها الثاني نصف مستقيم من (Δ') يوافق θ بترديد (π).هذا القيس هو قيس الزاوية الموجهة للمستقيمين (Δ) و(Δ') ويُرمز لها بالرمز $\overline{(\Delta ، \Delta')}$.

ونكتب : $\overline{(\Delta ، \Delta')} \equiv \theta\ [\pi]$.

وبصفة مماثلة نجد : $\overline{(\Delta' ، \Delta)} \equiv -\theta\ [\pi]$.

* إذا كان (Δ) يوازي (Δ') نقول أن $\overline{(\Delta ، \Delta')} \equiv \overline{(\Delta' ، \Delta)} \equiv 0\ [\pi]$.

3 – 1 – 5 – خواص زوايا المستقيمات :

1 – $\overline{(\Delta ، \Delta')} + \overline{(\Delta' ، \Delta'')} \equiv \overline{(\Delta ، \Delta'')}\ [\pi]$. (علاقة شال)

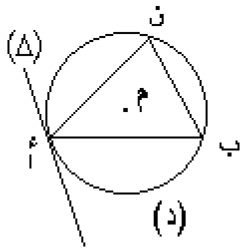
2 – $\overline{(\Delta ، \Delta)} \equiv 0\ [\pi]$.

3 – (Δ) // (Δ') ⇔ $\overline{(\Delta ، \Delta')} \equiv 0\ [\pi]$.

4 – (Δ) ⊥ (Δ') ⇔ $\overline{(\Delta ، \Delta')} \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

5 – $\overline{(\Delta ، \Delta')} + \overline{(\Delta' ، \Delta)} \equiv 0\ [\pi]$.

3 – 1 – 6 – الزاوية المحيطية :



(د) دائرة ذات المركز م. أ ، ب ، ن ثلاث نقط من الدائرة (د).

* الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{نأ} ، \overrightarrow{نب})$ تسمى زاوية محيطية.

ويكون لدينا : $(\overrightarrow{مأ} ، \overrightarrow{مب}) = 2(\overrightarrow{نأ} ، \overrightarrow{نب})$.

*(Δ) مماس لدائرة (د) في النقطة أ .

نقول عن الزاوية (Δ ، أ ب) للمستقيمين (Δ) و(أ ب) أنها أيضا زاوية محيطية

ويكون لدينا : (Δ ، أ ب) = (ن أ ، ن ب).

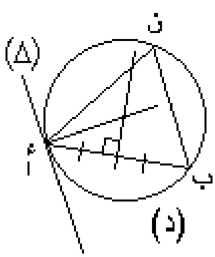
3 –1 –6 –1 – مجموعة النقط ن من المستوي حيث $\overline{(نأ ، نب)} \equiv \alpha\ [\pi]$ لتكن أ ، ب نقطتين معلومتين ، α عدد حقيقي.

نسمي (ى) مجموعة النقط ن من المستوي بحيث يكون $\overline{(نأ ، نب)} \equiv \alpha\ [\pi]$

* إذا كان α = 0 فإن (ى) هي مجموعة نقط المستقيم (أ ب).

* إذا كان α ≠ 0 فإن (ى) هي الدائرة، باستثناء النقطتين أ و ب، التي تمر منأ و ب والتي تمس في أ المستقيم (Δ) المعرف كما يلي :

$\overline{(\Delta، أ ب)} \equiv \alpha\ [\pi]$.



ملاحظة :

مركز هذه الدائرة هو نقطة تقاطع محور القطعة [أ ب]

والمستقيم العمودي على (Δ) في النقطة أ.

3 – 1 – 6 – 2 مجموعة النقط ن من المستوي حيث $(\overrightarrow{\text{ن أ}}، \overrightarrow{\text{ن ب}}) \equiv \alpha\ [2\pi]$

أ، ب نقطتان معلومتان ، α عدد حقيقي

نسمي (ىَ) مجموعة النقط ن من المستوي بحيث يكون $(\overrightarrow{\text{ن أ}}، \overrightarrow{\text{ن ب}}) \equiv \alpha\ [2\pi]$

* إذا كان $\alpha = 0$ فإن (ىَ) هي المستقيم (أ ب) باستثناء القطعة [أ ب]

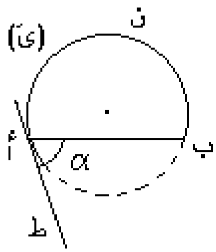
* إذا كان $\alpha = \pi$ فإن (ىَ) هي القطعة [أ ب] باستثناء النقطتين أ و ب.

* إذا كان $\alpha \neq$ ك π حيث ك عدد صحيح فإن (ىَ) محتواة في (ى)، المعرفة سابقاً لأن :

$$(\overrightarrow{\text{ن أ}}، \overrightarrow{\text{ن ب}}) \equiv \alpha\ [2\pi] \Leftarrow (\overline{\text{ن أ}}، \overline{\text{ن ب}}) \equiv \alpha\ [\pi]$$

نقبل أن (ىَ) هي أحد قوسي الدائرة المعرفة بالعلاقة : $(\overline{\text{ن أ}}، \overline{\text{ن ب}}) \equiv \alpha\ [\pi]$

ملاحظة : إذا كان [أ ط) نصف مستقيم معرف كما يلي : $(\overrightarrow{\text{أ ط}}، \overrightarrow{\text{أ ب}}) \equiv \alpha\ [2\pi]$. فإن (ىَ) هي القوس الواقع في نصف المستوي الذي حده (أب) ولا يحوي [أط)



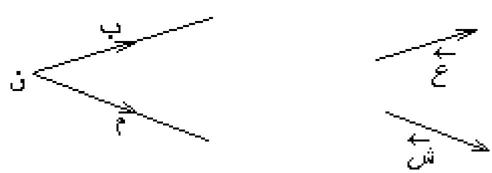
3 – 2 –الجداء السلمي وتطبيقاته :

3 – 2 – 1 – التعريف والخواص :

3 – 2 – 1 – 1 – زاوية شعاعين :

ليكن شعاعان $\overleftarrow{\text{ش}}$ ، $\overleftarrow{\text{ع}}$ ونقطة كيفية ن من الفضاء. توجد نقطتان أ ، ب وحيدتان بحيث : $\overleftarrow{\text{ن أ}} = \overleftarrow{\text{ش}}$ وَ $\overleftarrow{\text{ن ب}} = \overleftarrow{\text{ع}}$ النقاط الثلاث تعين مستوياً (π). نسمي زاوية الشعاعين $\overleftarrow{\text{ش}}$ و $\overleftarrow{\text{ع}}$ بهذا الترتيب الزاوية المعينة بنصفي المستقيمين [ن أ)،[ن ب) ونكتب :

$(\overleftarrow{\text{ش}} ، \overleftarrow{\text{ع}}) = ($ ن أ ، ن ب $)$



3 – 2 – 1 – 2 – تعريف الجداء السلمي :

نسمي الجداء السلمي للشعاعين $\overleftarrow{ش}$ و $\overleftarrow{ع}$ ونرمز له : $\overleftarrow{ش}.\overleftarrow{ع}$ العدد الحقيقي :

$\overleftarrow{ش}.\overleftarrow{ع} = \|\overleftarrow{ش}\|.\|\overleftarrow{ع}\|.$ تجب $(\overleftarrow{ش}.\overleftarrow{ع})$

ملاحظة : الجداء السلمي ليس قانوناً داخلياً في **ش** بل هو تطبيق من **ش** × **ش** نحو ح

3 – 2 – 1 – 3 – خواص الجداء السلمي :

1 – $\overleftarrow{ش}.\overleftarrow{ش} = \overleftarrow{ش}^2 = \|\overleftarrow{ش}\|^2$.

2 – $\overleftarrow{ش}.\overleftarrow{ع} = \overleftarrow{ع}.\overleftarrow{ش}$

3 – $\overleftarrow{ش}.\left(\overleftarrow{ع} + \overleftarrow{ق}\right) = \overleftarrow{ش}.\overleftarrow{ع} + \overleftarrow{ش}.\overleftarrow{ق}$.

4 – $\overleftarrow{ش}.\left(\lambda\overleftarrow{ع}\right) = \lambda\,\overleftarrow{ش}.\overleftarrow{ع} = \left(\lambda\overleftarrow{ش}\right).\overleftarrow{ع}$

5 – $\overleftarrow{ش} = \overleftarrow{0}$ أو $\overleftarrow{ع} = \overleftarrow{0} \Leftarrow \overleftarrow{ش}.\overleftarrow{ع} = 0$

6 – $\overleftarrow{ش}.\overleftarrow{ع} = 0 \Leftrightarrow \overleftarrow{ش} \perp \overleftarrow{ع}$ أو $\overleftarrow{ش} = \overleftarrow{0}$ أو $\overleftarrow{ع} = \overleftarrow{0}$

7 – $\left(\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}\right)^2 = \overleftarrow{أ}^2 + \overleftarrow{ب}^2 + 2\overleftarrow{أ}.\overleftarrow{ب}$

8 – $\left(\overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب}\right)^2 = \overleftarrow{أ}^2 + \overleftarrow{ب}^2 - 2\overleftarrow{أ}.\overleftarrow{ب}$

9 – $\left(\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}\right)\left(\overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب}\right) = \overleftarrow{أ}^2 - \overleftarrow{ب}^2$

ملاحظة :

مهما كان $\overleftarrow{ش}$ فإن $\overleftarrow{ش} \perp \overleftarrow{0}$

3 – 2 – 1 – 4 –الأساس المتعامد والمتجانس :

إذا كان ($\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ك}$ ، $\overleftarrow{ي}$) أساساً للفضاء الشعاعي **ش** نقول أنه متعامد إذا كان :

$\overleftarrow{و} \perp \overleftarrow{ي}$ ، $\overleftarrow{ي} \perp \overleftarrow{ك}$ ، $\overleftarrow{و} \perp \overleftarrow{ك}$ ونقول أنه متجانس إذا كان :

$$\|\vec{و}\| = \|\vec{ك}\| = \|\vec{ي}\| = 1$$

3 – 2 – 1 – 5 – عبارة الجداء السلمي في أساس متعامد ومتجانس :

في الفضاء الشعاعي **ش** المنسوب إلى أساس ($\vec{و}$ ، $\vec{ك}$ ، $\vec{ي}$) متعامد ومتجانس الجداء السلمي

للشعاعين $\vec{ش}\begin{pmatrix} ا \\ ب \\ جـ \end{pmatrix}$ و $\vec{ع}\begin{pmatrix} اَ \\ بَ \\ جـَ \end{pmatrix}$ هو العدد :

$$\boxed{\vec{ش}.\vec{ع} = ا\,اَ + ب\,بَ + جـ\,جـَ}$$

البرهان :

$$\vec{ش}.\vec{ع} = \left(ا\vec{و} + ب\vec{ي} + جـ\,\vec{ك}\right).\left(اَ\vec{و} + بَ\vec{ي} + جـَ\,\vec{ك}\right)$$

$$\vec{ش}.\vec{ع} = ا\,اَ\,\vec{و}^2 + ب\,بَ\,\vec{ي}^2 + جـ\,جـَ\,\vec{ك}^2 + ا\,بَ\left(\vec{و}.\vec{ي}\right) + ا\,جـَ\left(\vec{و}.\vec{ك}\right) + ب\,اَ$$

$$\left(\vec{و}.\vec{ي}\right) + ب\,جـَ\left(\vec{ي}.\vec{ك}\right) + جـ\,اَ\left(\vec{و}.\vec{ك}\right) + جـ\,بَ\left(\vec{ي}.\vec{ك}\right)$$

ولكن : $\vec{و}.\vec{ي} = \vec{ي}.\vec{و} = \vec{و}.\vec{ك} = \vec{ك}.\vec{و} = \vec{ك}.\vec{ي} = \vec{ي}.\vec{ك} = 0$

وَ $\vec{ك}^2 = \vec{و}^2 = \vec{ي}^2 = \|\vec{و}\|^2 = \|\vec{ي}\|^2 = \|\vec{ك}\|^2 = 1$

ومنه $\vec{ش}.\vec{ع} = ا\,اَ + ب\,بَ + جـ\,جـَ$

نتيجة :

$$\|\vec{ش}\|^2 = \vec{ش}.\vec{ش} = ا^2 + ب^2 + جـ^2$$

$$\|\vec{ش}\| = \sqrt{ا^2 + ب^2 + جـ^2}$$

3 – 2 – 2 – تطبيقات الجداء السلمي :

3 – 2 – 2 – 1 – عبارة المسافة بين نقطتين :

في الفضاء (ف) المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس المسافة بين النقطتين

$أ(س_1 ، ع_1 ، ص_1)$ وَ $ب(س_2 ، ع_2 ، ص_2)$ هي :

$$م (أ ، ب) = \left\|\overleftarrow{أب}\right\| = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ع_2 - ع_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$$

3 – 2 – 2 – 2 – الدائرة والكرة :

* في المستوي (π) المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس الدائرة (د) التي مركزها النقطة $أ(س_0 ، ع_0)$ ونصف قطرها نق هي مجموعة النقط ن (س ، ع ، ص) التي المسافة بين كل نقطة منها والنقطة أ تُساوي نق.

$$(د) = \{ ن ، ن \in (\pi) / م (أ ، ن) = نق \}$$

وَ م (أ ، ن) = نق $\Leftrightarrow \left\|\overleftarrow{أن}\right\| =$ نق $\Leftrightarrow \left\|\overleftarrow{أن}\right\|^2 =$ نق^2 وَ نق ≥ 0.

$$م (أ ، ن) = نق \Leftrightarrow (س - س_0)^2 + (ع - ع_0)^2 = نق^2 \quad نق \geq 0$$

والعبارة الأخيرة هي معادلة الدائرة بالنسبة للمعلم المختار.

* في الفضاء (ف) المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس الكرة (ك) التي مركزها $أ(س_0 ، ع_0 ، ص_0)$ ونصف قطرها نق هي :

$$(ك) = \{ ن ، ن \in (ف) / م (أ ، ن) = نق$$

بنفس الطريقة السابقة نتحصل على المعادلة :

$$(س - س_0)^2 + (ع - ع_0)^2 + (ص - ص^0)^2 = نق^2$$

3 – 2 – 2 – 3 – الشعاع العمودي على مستقيم في المستوي :

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس الشعاع $\overleftarrow{ش}\begin{pmatrix} أ \\ ب \end{pmatrix}$ عمودي على المستقيم الذي معادلته

: أ س + ب ع + جـ = 0.

البرهان :

مَنْحى المستقيم هو منحنى شعاع توجيهه $\overleftarrow{ق}\begin{pmatrix} -ب \\ أ \end{pmatrix}$ و $\overleftarrow{ش} \perp \overleftarrow{ق}$ لأن :

أ (−ب) + ب . أ = 0 أي $\overleftarrow{ش}.\overleftarrow{ق} = 0$

3 − 2 − 2 − 4 − الشعاع العمودي على مستوي :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس الشعاع $\overleftarrow{ش}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ عمودي على المستوي (π) الذي

معادلته : α س + β ع + γ ص + δ = 0

البرهان :

* الشعاع $\overleftarrow{ش}$ يعامد الشعاعين التوجيهيين $\overleftarrow{ك}\begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ و $\overleftarrow{ك'}\begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix}$ (إذا كان $\alpha \neq 0$)

لأن : $\overleftarrow{ش}.\overleftarrow{ك} = \alpha\,\beta + \beta\,(-\alpha) + \gamma\,(0) = 0$

$\overleftarrow{ش}.\overleftarrow{ك'} = \alpha\,\gamma + \beta\,(0) + \gamma\,(-\alpha) = 0$

* إذا كان $\alpha = 0$ فإن الشعاع $\overleftarrow{ش}\begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ يعامد الشعاعين $\overleftarrow{هـ}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ والشعاع $\overleftarrow{ق}\begin{pmatrix} 0 \\ -\gamma \\ \beta \end{pmatrix}$ اللذان

يمثلان شعاعي التوجيه للمستوي في هذه الحالة.

3 − 2 − 2 − 5 − برهان شرط توازي مستويين :

ليكن المستويان : (π) : α س + β ع + γ ص + δ = 0

وَ (π') : α' س + β' ع + γ' ص + δ' = 0

والشعاع $\overleftarrow{ق}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ العمودي على (π) والشعاع $\overleftarrow{ق'}\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{pmatrix}$ العمودي على (π')

فإن : (π) يوازي (π') $\Leftrightarrow$ $\overleftarrow{ق}$ يوازي $\overleftarrow{ق'}$

$\overleftarrow{ق}$ يوازي $\overleftarrow{ق'}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix}\alpha & \alpha'\\ \beta & \beta'\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\beta & \beta'\\ \gamma & \gamma'\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\gamma & \gamma'\\ \alpha & \alpha'\end{vmatrix} = 0$

3 – 2 – 2 –6 – المستقيمان المتعامدان في المستوي :

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس يكون المستقيمان :

(Δ) : أ س + ب ع + جـ = 0 وَ (Δ') :أَس + بَ ع + جـَ = 0 متعامدين إذا وفقط إذا كان : أ أَ + ب بَ = 0

3 – 2 – 2 – 7 – المستويات المتعامدان :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس يكون المستويان (π) :α س + β ع + γ ص + δ = 0 وَ (π') :α'س + β'ع + γ'ص + δ' = 0 متعامدين إذا وفقط إذا كان : $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$

البرهان :

الشرط يعبّر عن تعامد الشعاعين : العمودي على (π) والعمودي على (π') وهذا يثبت تعامد المستويين.

3 – 2 – 2 – 8 – تعامد مستقيم مع مستوي :

* إذا كان المستقيم معرفا بمعادلات وسيطية، شعاع التوجيه يظهر من خلال المعادلات ويكفي أن نتحقق من أنه يعامد المستوي.

* إذا كان المستقيم معرفا بمعادلات ديكارتية :

مثلاً : (Δ) : $\begin{cases} \text{س} - \text{ع} + 2\text{ص} + 1 = 0 \;. . . . (\pi_1) \\ \text{س} + 2\text{ع} + \text{ص} - 3 = 0 \;. . . . (\pi_2) \end{cases}$

(π) : 5 س − ع − 3 ص = 0

يكفي أن نثبت أن الشعاع $\overleftarrow{ق}$ العمودي على (π) هو عمودي على كل من $\overleftarrow{ق}_1$ العمودي على (π_1) وَ $\overleftarrow{ق}_2$. $\overleftarrow{ق}\begin{pmatrix}5\\-1\\-3\end{pmatrix}$ عمودي على (π) وَ $\overleftarrow{ق}_1\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ عمودي على (π_1) وَ $\overleftarrow{ق}_2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ عمودي على (π_2) .

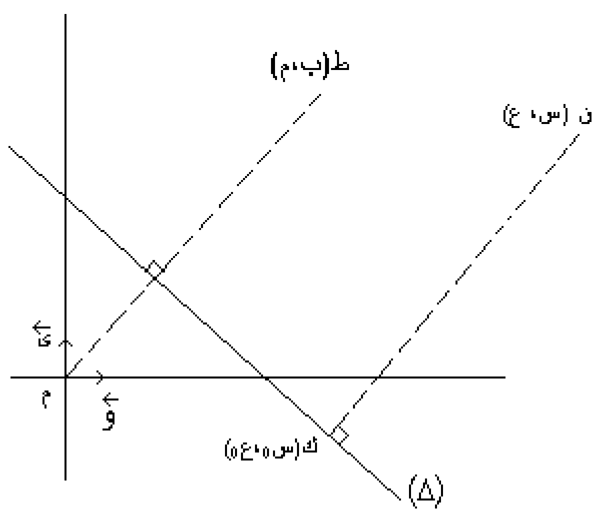
$$\overleftarrow{ق} \perp \overleftarrow{ق}_1 \Leftrightarrow 5(1) + (-1)(-1) + (-3)(+2) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

$$\overleftarrow{ق} \perp \overleftarrow{ق}_2 \Leftrightarrow 5(+1) + (-1)(2) + (-3)(+1) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

3 – 2 – 2 –2– 9 المسافة بين نقطة ومستقيم :

ليكن في المستوي (π) المنسوب إلى معلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$) متعامد ومتجانس، المستقيم (Δ) الذي معادلته : أ س + ب ع + جـ = 0.

والنقطة ن (س ، ع) التي لا تنتمي إليه . (ن $\notin \Delta$).



المسافة بين ن والمستقيم (Δ) هي المسافة م (ن، ك) أي $\left\| \overrightarrow{\text{ك ن}} \right\|$.

لتكن ط النقطة التي احداثياها (ا، ب) وَ ك المسقط العمودي لِـ ن على (Δ) . الشعاع $\overrightarrow{\text{م ط}} \begin{pmatrix} ا \\ ب \end{pmatrix}$

عمودي على (Δ) (حسب النظرية 3 − 2 − 2 − 3)

والشعاع $\overrightarrow{\text{ش}} = \dfrac{\overrightarrow{\text{م ط}}}{\left\| \overrightarrow{\text{م ط}} \right\|}$ هو شعاع عمودي على (Δ) طويلته 1 ومركبتاه ($\dfrac{ا}{\sqrt{ا^2 + ب^2}}$ ، $\dfrac{ب}{\sqrt{ا^2 + ب^2}}$) (تحقق من ذلك بحساب $\overrightarrow{\text{ش}}^2$)

الشعاعان $\overrightarrow{\text{ش}}$ وَ $\overrightarrow{\text{ك ن}}$ متوازيان إذن :

$$\left| \overrightarrow{\text{ش}} . \overrightarrow{\text{ك ن}} \right| = \left\| \overrightarrow{\text{ش}} \right\| . \left\| \overrightarrow{\text{ك ن}} \right\| = \left\| \overrightarrow{\text{ك ن}} \right\| \quad \text{لأن} \quad \left\| \overrightarrow{\text{ش}} \right\| = 1$$

لدينا : $\left| \overrightarrow{\text{ش}} . \overrightarrow{\text{ك ن}} \right| = \left| \dfrac{ا}{\sqrt{ا^2 + ب^2}} \left(\text{س} - \text{س}_0 \right) + \dfrac{ب}{\sqrt{ا^2 + ب^2}} \left(\text{ع} - \text{ع}_0 \right) \right|$

$$\left| \overrightarrow{\text{ش}} . \overrightarrow{\text{ك ن}} \right| = \left| \dfrac{\left| ا\text{س} + ب\text{ ع} - ا\text{س}_0 - ب\text{ ع}_0 \right|}{\sqrt{ا^2 + ب^2}} \right|$$

وبما أن ك نقطة من (Δ) فإن: ا س_0 +ب ع_0 +جـ = 0 يعني جـ =−ا س_0 + ب ع_0

إذن : م (ن ، (Δ)) = $\left\| \overrightarrow{\text{ك ن}} \right\| = \dfrac{\left| ا\text{س}_{\text{ن}} + ب\text{ ع}_{\text{ن}} + \text{جـ} \right|}{\sqrt{ا^2 + ب^2}}$

مثال : (Δ) : 3 س − 4 ع + 2 = 0 ، ن(1 ، −2).

م (ن ، (Δ)) = $\dfrac{\left| 3(1) - 4(-2) + 2 \right|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{13}{5}$.

3 − 2 − 2 − 10 المسافة بين نقطة ومستو :

ليكن في الفضاء (ف) المنسوب إلى معلم (م ، $\overrightarrow{\text{و}}$ ، $\overrightarrow{\text{ي}}$ ، $\overrightarrow{\text{ك}}$) متعامد ومتجانس المستوي (π) الذي معادلته :اس + ب ع + جـ ص + د = 0 والنقطة ن(س، ع ، ص) التي لا تنتمي إلى (π)

ولتكن النقطة نَ (سَ ، عَ ، صَ) المسقط العمودي لـِ ن على المستوي(π) ولتكن ط النقطة التي إحداثياتها (أ ، ب ، جـ).

الشعاع $\overleftarrow{\text{م ط}}$ عمودي على (π)(حسب النظرية 3 − 2 − 2 − 4) مع $\overleftarrow{\text{م ط}} \begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{ب} \\ \text{جـ} \end{pmatrix}$

والشعاع $\frac{\overleftarrow{\text{م ط}}}{\left\|\overleftarrow{\text{م ط}}\right\|} = \overleftarrow{\text{ش}}$ هو شعاع عمودي على (π) طويلته 1 ومركباته :

$$\frac{\text{أ}}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{جـ}^2}} \text{ ، } \frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{جـ}^2}} \text{ ، } \frac{\text{جـ}}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{جـ}^2}}$$

الشعاعان $\overleftarrow{\text{ش}}$ و $\overleftarrow{\text{نَ ن}}$ متوازيان إذن : $\left|\overleftarrow{\text{ش}}.\ \overleftarrow{\text{نَ ن}}\right| = \left\|\overleftarrow{\text{ش}}\right\|.\left\|\overleftarrow{\text{نَ ن}}\right\| = \left\|\overleftarrow{\text{نَ ن}}\right\|$.

لأن $\left\|\overleftarrow{\text{ش}}\right\| = 1$. لدينا :

$$\left|\overleftarrow{\text{ش}}.\ \overleftarrow{\text{نَ ن}}\right| = \frac{\text{أ}}{\sqrt{\text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{جـ}^2}}(\text{س}-\text{سَ}) + \frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{جـ}^2}}(\text{ع}-\text{عَ}) + \frac{\text{جـ}}{\sqrt{\text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{جـ}^2}}(\text{ص}-\text{صَ})$$

$$\left|\overleftarrow{\text{ش}}.\ \overleftarrow{\text{نَ ن}}\right| = \frac{\text{أ س} + \text{ب ع} + \text{جـ ص} - \text{أ سَ} - \text{ب عَ} - \text{جـ صَ}}{\sqrt{\text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{جـ}^2}}$$

لكن نَ نقطة من (π) إذن أ سَ + ب عَ +جـ صَ + د = 0 أي

د = − أ سَ − ب عَ − جـ صَ ومنه :

$$\boxed{\text{م (ن ، }(\pi)) = \left\|\overleftarrow{\text{نَ ن}}\right\| = \frac{\text{أ س}_{\text{ن}} + \text{ب ع}_{\text{ن}} + \text{جـ ص}_{\text{ن}} + \text{د}}{\sqrt{\text{أ}^2+\text{ب}^2+\text{جـ}^2}}}$$

مثـال :

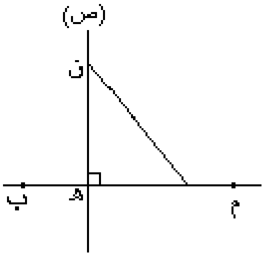
المسافة بين المبدأ م (0 ، 0 ، 0) والمستوي الذي معادلته :

س − 3 ع + 2 ص + 5 = 0 هي :

$$\frac{|0-3(0)+2(0)+5|}{\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}} = \frac{5}{\sqrt{14}}.$$

3 − 2 − 2 − 11 دراسة بعض مجموعات النقط من المستوي :

3− 2 −2− 11− 1 : مجموعة النقط ن من المستوي حيث $\overleftarrow{\text{أ ب}}.\overleftarrow{\text{أ ن}} = \text{ك}$



أ، ب نقطتان من المستوي ثابتتان ومتمايزتان ، ك عدد حقيقي معين ومجموعة النقط ن من المستوي بحيث $\overrightarrow{\text{أ ب}}.\overrightarrow{\text{أ ن}}=\text{ك}$ هي المستقيم (ق) العمودي على المستقيم (أ ب) في النقطة هـ المعرفة بالعلاقة $\overline{\text{أ ب}}\times\overline{\text{أ هـ}}=\text{ك}$

3 -2 - 2 -11- 2 - مجموعة النقط ن من المستوي حيث $\overrightarrow{\text{ن أ}}.\overrightarrow{\text{ن ب}}=\text{ك}$

أ ، ب نقطتان ثابتتان ومتمايزتان، ك عدد حقيقي معطى، ولتكن النقطة هـ منتصف القطعة [أ ب].

إذا كانت ي مجموعة النقط ن من المستوي حيث $\overrightarrow{\text{ن أ}}.\overrightarrow{\text{ن ب}}=\text{ك}$ فإن :

ن ∋ ي $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{\text{ن أ}}.\overrightarrow{\text{ن ب}}=\text{ك}$.

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{\text{ن هـ}}+\overrightarrow{\text{هـ أ}}\right)\left(\overrightarrow{\text{ن هـ}}+\overrightarrow{\text{هـ ب}}\right)=\text{ك}$$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{\text{ن هـ}}+\overrightarrow{\text{هـ أ}}\right)\left(\overrightarrow{\text{ن هـ}}-\overrightarrow{\text{هـ أ}}\right)=\text{ك} \ .$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\text{ن هـ}}^{2}=\text{ك}+\overrightarrow{\text{هـ أ}}^{2} \ .$$

وبالتالي نستنتج ما يلي :

- إذا كان $\left(\text{ك}+\overrightarrow{\text{هـ أ}}^{2}\right)<0$ فإن ي = $\varnothing$
- إذا كان $\left(\text{ك}+\overrightarrow{\text{هـ أ}}^{2}\right)=0$ فإن ي = {هـ}
- إذا كان $\left(\text{ك}+\overrightarrow{\text{هـ أ}}^{2}\right)>0$ فإن ي هي الدائرة التي مركزها النقطة هـ ونصف قطرها $\sqrt{\text{ك}+\overrightarrow{\text{هـ أ}}^{2}}$.

ملاحظة : $\overrightarrow{\text{هـ أ}}^{2}=\left\|\overrightarrow{\text{هـ أ}}\right\|^{2}=\text{هـ أ}^{2}$ ومنه $\text{ك}+\overrightarrow{\text{هـ أ}}^{2}=\text{ك}+\text{هـ أ}^{2}$

3-2 - 2-11- 3 مجموعة النقط ن من المستوي بحيث $\text{ن أ}^{2}+\text{ن ب}^{2}=\text{ك}$

أ ، ب نقطتان ثابتتان ومتمايزتان من المستوي، ك عدد حقيقي مفروض، هـ منتصف القطعة [أ ب].

إذا كانت ي مجموعة النقط ن من المستوي حيث $\text{ن أ}^{2}+\text{ن ب}^{2}=\text{ك}$ فإن :

ن ∋ ي $\Leftrightarrow$ $\text{ن أ}^{2}+\text{ن ب}^{2}=\text{ك}$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{\text{ن هـ}}+\overrightarrow{\text{هـ أ}}\right)^{2}+\left(\overrightarrow{\text{ن هـ}}+\overrightarrow{\text{هـ ب}}\right)^{2}=\text{ك}$$

$$\Leftrightarrow \text{هـ ن}^{2}=\frac{\text{ك}-2\ \text{هـ أ}^{2}}{2} \quad \left(\text{لأن}\ \overrightarrow{\text{هـ ب}}=-\overrightarrow{\text{هـ أ}}\right)$$

وبالتالي نستنتج مايلي :

- إذا كان $\left(ك - 2\ \overleftarrow{هـ أ}^2\right) \langle 0$ فإن ي = $\varnothing$

- إذا كان $\left(ك - 2\ \overleftarrow{هـ أ}^2\right) = 0$ فإن ي = {هـ}

- إذا كـان $\left(ك - 2\ \overleftarrow{هـ أ}^2\right) \rangle 0$ فـإن ي هــي الدائـرة التـي مركـزها الـنقطة هــ ونصـف قطـرها $\sqrt{\dfrac{ك - 2\ \overleftarrow{هـ أ}^2}{2}}$. أي $\sqrt{\dfrac{ك - 2\ هـ أ^2}{2}}$

3 -2- 2-11 -4-مجموعة النقط ن من المستوي حيث ن أ ^{2}-ن ب ^{2}=ك

أ ، ب نـقطـتـان ثـابـتـتـان ومـتـمـايـزتـان مـن الـمسـتـوي، ك عـدد حـقـيقـي مفـروض، ولـتـكـن ي مـجـمـوعـة الـنـقـط ن مـن الـمسـتـوي حيـث ن أ ^{2}-ن ب ^{2}=ك .

لـتكن هـ منتـصف الـقطـعـة [أ ب].

ن ∍ ي ⇔ ن أ ^{2}-ن ب ^{2}=ك

$$\Leftrightarrow \left(\overleftarrow{ن\ هـ} + \overleftarrow{هـ أ}\right)^2 - \left(\overleftarrow{ن\ هـ} + \overleftarrow{هـ ب}\right)^2 = ك$$

$$\overline{هـ ب}.\overleftarrow{هـ ن} = \frac{ك}{4} \quad \left(\overleftarrow{هـ أ} = -\overleftarrow{هـ ب}\right)$$

حسب الفقرة (3 - 2 - 2 - 11 - 1) فإن مجموعة النقط ي هي المستقيم العمودي على (أ ب) في النقطة هـ$_0$ المعرفة بالعلاقة :

$$\overline{هـ ب}.\overline{هـ\ هـ_0} = \frac{ك}{4}$$

3 - 2 - 2 - 11 - 5 - مجموعة النقط ن من المستوي حيث $\dfrac{ن أ}{ن ب} = ك$

أ، ب نقطتان ثابتتان ومتمايزتان من المستوي، ك عدد حقيقي موجب تماماً، ولتكن ي مجموعة النقط ن من المستوي حيث $\dfrac{ن أ}{ن ب} = ك$

* إذا كان ك = 1 :

فإن ن ∍ ي ⇔ $\dfrac{ن أ}{ن ب} = 1$

⇔ ن أ = ن ب

وبالتالي نستنتج أن ي هي محور القطعة [أ ب].

* إذا كان ك $\neq 1$ فإن :

$$\text{ن} \in \text{ي} \Leftrightarrow \frac{\text{ن أ}}{\text{ن ب}} = \text{ك}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{ن أ}^2}{\text{ن ب}^2} = \text{ك}^2$$

$$\Leftrightarrow \text{ن أ}^2 - \text{ك}^2 \text{ن ب}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\overleftarrow{\text{ن أ}} - \text{ك}\,\overleftarrow{\text{ن ب}}\right)\left(\overleftarrow{\text{ن أ}} + \text{ك}\,\overleftarrow{\text{ن ب}}\right) = 0$$

إذا كانت ث مركز المسافات المتناسبة للنقطتينأ ، ب المرفقتين بالمعاملين 1 ، − ك على الترتيب فإن :

$$\overleftarrow{\text{ن أ}} - \text{ك}\,\overleftarrow{\text{ن ب}} = (1 - \text{ك})\overleftarrow{\text{ن ث}}$$

وإذا كانت ثَ مركز المسافات المتناسبة للنقطتين أ ، ب المرفقتين بالمعاملين 1 و ك على الترتيب فإن :

$$\overleftarrow{\text{ن أ}} + \text{ك}\,\overleftarrow{\text{ن ب}} = (1 + \text{ك})\overleftarrow{\text{ن ثَ}}$$

وبالتالي : $\text{ن} \in \text{ي} \Leftrightarrow (1 - \text{ك})(1 + \text{ك})\overleftarrow{\text{ن ث}} . \overleftarrow{\text{ن ثَ}} = 0$

$$\Leftrightarrow \overleftarrow{\text{ن ث}} . \overleftarrow{\text{ن ثَ}} = 0$$

حسب الفقرة (3 − 2 − 2 − 11 −2) فإن ي هي الدائرة التي قطرها [ث ثَ].

تطبيق :

ينسب المستوي(π) إلى معلم متعامد ومتجانس (م، $\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ي}}$).أ ،ب نقطتان من المستوي(π).

1 − عين المجموعتين م وَ مَ التاليتين :

$$\text{م} = \left\{ \text{ن} \in (\pi) : \left\| 2\overleftarrow{\text{ن أ}} + \overleftarrow{\text{ن ب}} \right\| = \left\| \overleftarrow{\text{ن أ}} + 2\overleftarrow{\text{ن ب}} \right\| \right\}$$

$$\text{مَ} = \left\{ \text{ن} \in (\pi) : \left(2\overleftarrow{\text{ن أ}} + \overleftarrow{\text{ن ب}}\right) \perp \left(\overleftarrow{\text{ن أ}} + 2\overleftarrow{\text{ن ب}}\right) \right\}$$

2 − هل توجد في المستوي (π) نقط تنتمي إلى م $\cap$ مَ؟

الحل :

ث مركز المسافات المتناسبة للنقطتينأ ، ب المرفقتين بالمعاملين 2 ، 1 على الترتيب

إذن : $2\overleftarrow{\text{ن أ}} + \overleftarrow{\text{ن ب}} = 3\overleftarrow{\text{ن ث}}$.

ثَ مركز المسافات المتناسبة للنقطتينأ ، ب المرفقتين بالمعاملين 1 ، 2 على الترتيب إذن

$$\overleftarrow{\text{ن أ}} + 2\overleftarrow{\text{ن ب}} = 3\overleftarrow{\text{ن ثَ}}$$

1 − تعيين المجموعة م.

لتكن ن نقطة من المستوي (π).

$$ن \in م \Leftrightarrow \left\| 2\overleftarrow{نأ} + \overleftarrow{نب} \right\| = \left\| \overleftarrow{نأ} + 2\overleftarrow{نب} \right\| \Leftrightarrow \left\| 3\overleftarrow{نث} \right\| = \left\| 3\overleftarrow{نثَ} \right\|$$

$$\Leftrightarrow \left\| \overleftarrow{نث} \right\| = \left\| \overleftarrow{نثَ} \right\|$$

من التكافؤ الأخير نستنتج أن المجموعة م هي محور القطعة [ث ثَ].

* تعيين المجموعة مَ : لتكن ن نقطة من المستوي (π).

$$ن \in مَ \Leftrightarrow \left(2\overleftarrow{نأ} + \overleftarrow{نب}\right) \perp \left(\overleftarrow{نأ} + 2\overleftarrow{نب}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(2\overleftarrow{نأ} + \overleftarrow{نب}\right) . \left(\overleftarrow{نأ} + 2\overleftarrow{نب}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(3\overleftarrow{نث}\right) . \left(3\overleftarrow{نثَ}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overleftarrow{نث} . \overleftarrow{نثَ} = 0$$

من التكافؤ الأخير نستنتج أن المجموعة مَ هي الدائرة التي قطرها [ث ثَ].

2 – نعم، هما نقطتا التقاطع محور القطعة [ث ثَ] والدائرة التي قطرها [ث ثَ]

3-2-2-12- معادلة الأسطوانة التي محورها أحد محاور المعلم المتعامد والمتجانس :

لنفرض أن محور الأسطوانة هو (ص صَ) ونصف قطرها نق.

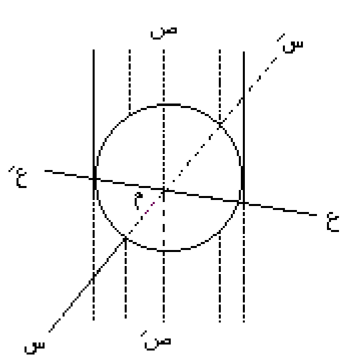
مسقط الأسطوانة وفق منحنى (ص صَ) وعلى المستوي (س م ع) هو الدائرة التي مركزها م ونصف قطرها نق.

ومنه فإن كل نقطة ن (س ، ع ، ص) من الفضاء تكون نقطة من الأسطوانة إذا وفقط إذا كان :

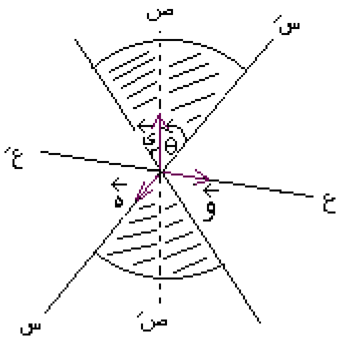
$$\boxed{س^2 + ع^2 = نق^2}$$

بنفس الطريقة، الأسطوانة التي محاورها (س سَ) و (ع عَ) تعرّف بالمعادلتين التاليتين على الترتيب :

$$ع^2 + ص^2 = نق^2 \quad و \quad س^2 + ص^2 = نق^2$$



3 – 2 –2 –13– معادلة المخروط الذي محوره هو أحد محاور المعلم :



في المعلم المتعامد المتجانس(م ، $\overleftarrow{\text{هـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ي}}$)

محـور المخـروط هـو (ص صَ) وقمّته م ونصف

الزاوية في القمة هي : θ.

$\left(\frac{\pi}{2} \rangle \theta \rangle 0\right)$

تكون النقطة ن (س، ع، ص)

تنتمـي إلى المخروط إذا كان قيس الزاوية ($\overleftarrow{\text{ي}}$ ،

$\overleftarrow{\text{م ن}}$) تساوي θ.

إذا كانـت نَ هـي المسقط العمودي لـِ ن على (ص صَ) فالشرط السابق يكافئ

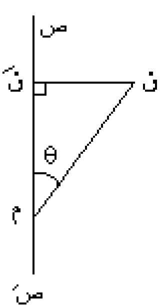
تجب ($\overleftarrow{\text{ي}}$ ، $\overleftarrow{\text{م ن}}$) = تجب θ

أي $\frac{\text{م نَ}}{\text{م ن}} =$ تجب θ أو $\frac{\text{م نَ}^2}{\text{م ن}^2} = (\text{تجب }\theta)^2$

يعني : $\frac{\text{ص}^2}{\text{س}^2+\text{ع}^2+\text{ص}^2} = \text{تجب}^2\theta$.

ومنه ($\text{س}^2 + \text{ع}^2 + \text{ص}^2$) $\text{تجب}^2\theta - \text{ص}^2 = 0$

وبما أن تجبθ ≠ 0 . $\left(\theta \neq \frac{\pi}{2}\right)$ نقسّم على $\text{تجب}^2\theta$ فنجد :



$\text{س}^2 + \text{ع}^2 + \text{ص}^2 - \frac{1}{\text{تجب}^2\theta}\,\text{ص}^2 = 0$.

أي $\text{س}^2 + \text{ع}^2 + \left(1 - \frac{\text{تجب}^2\theta + \text{جب}^2\theta}{\text{تجب}^2\theta}\right)\text{ص}^2 = 0$.

$$\boxed{\text{أي : } \text{س}^2 + \text{ع}^2 - \text{ظل}^2\theta \ \ \text{ص}^2 = 0.}$$

ملاحظة :

إذا كانت قمّة المخروط نقطة ك (0 ، 0 ،أ) من (ص صَ) تختلف عن م نجد باستعمال الإنسحاب الذي شعاعه $\overleftarrow{\text{أ ي}}$

المعادلة :

س^2 + ع^2 − ظل^2 θ (ص −أ)^2 = 0

3 − 2 − 2 − 14 − مساحات وحجوم بعض الأجسام :

*** مساحة وحجم الكرة :**

إذا كان α نصف قطر الكرة وَ م مساحتها و ح حجمها فإن :

$$م = 4 \times \pi \times \alpha^2$$

$$\text{وَ}\quad ح = \frac{4}{3} \times \pi \times \alpha^3$$

*** مساحة وحجم الأسطوانة :**

إذا كان α نصف قطر إحدى قاعدتي الأسطوانة وكان ع إرتفاعها وَ م مساحتها الجانبية وح حجمها فإن :

$$م = 2 \times \pi \times \alpha \times ع$$

$$\text{وَ}\quad ح = \pi \times \alpha^2 \times ع$$

*** مساحة وحجم المخروط الدوراني :**

إذا كان α نصف قطر قاعدة المخروط وكان ل طول أحد موّلداته وكان إرتفاعه وَ م مساحته الجاذبية و ح حجمه فإن :

$$م = \pi \times \alpha \times ل.$$

$$ح = \frac{1}{3} \times \pi \times \alpha^2 \times ع.$$

*مبــادئ فــي الـتــحويــلات الــنــقــطــيــة

الهـدف من الدرس : التعرّف على بعض التطبيقات الهندسية.

المدة اللازمـة لدراستـه : 05 ساعات

الدروس الواجـب مراجعتها : الأشعة ، التطبيقات.

المراجع الخاصـة بالـدرس : كتاب الرياضيات 3 ث / ع + ر.

المعهد التربوي الوطني.

تصمـيـم الـدرس

تمهيد

1 – التحـويـل النقطـي.

2 – التحـويـل المطـابق.

3 – التحـويـل التقـابلـي.

4 – تركيـب التحـويـلات النقطيـة.

5 – التحـويـل التضـامنـي.

6 – النقـط الصامـدة.

7 – العبـارة التحليليـة للتحـويـل النقطـي.

8 – التحويـل الـتآلـفـي.

9 – أمثـلـة.

10 – تتمـات.

11 – تماريـن التصحيـح الذاتـي.

12 – أجوبـة التصحيـح الذاتـي.

تمهيد :

إليك هذه الأمثلة.

مثال 1 : لتكن م نقطة ثابتة في المستوي (π) ولنرفق بكل نقطة ب النقطة بَ بحيث تكون النقطة م منتصف القطعة [ب بَ]. إن هذه العملية تعرّف تطبيقاً من (π) نحو (π) أي :

تا: $(\pi) \leftarrow (\pi)$

ب $\mapsto$ تا(ب) = بَ

نقول أن النقطة بَ نظيرة ب بالنسبة إلى النقطة م. ويسمى تا التناظر بالنسبة إلى م. (نلاحظ أن تا تقابل)

مثال 2 : ليكن (π) المستوي الإقليدي

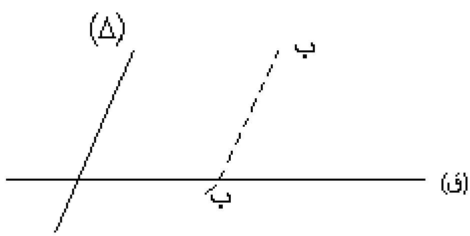
إن عملية الإسقاط على مستقيم (ق) توازياً مع المستقيم(Δ) تمثل تطبيقاً من (π) نحو (ق)، ندعوه الإسقاط على (ق) وفق (Δ) أي :

س: $(\pi) \leftarrow$ (ق)

ب $\mapsto$ بَ

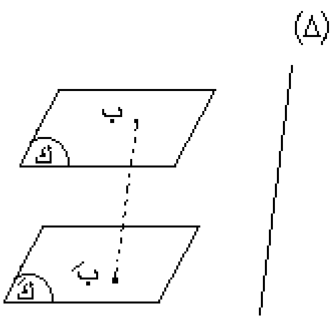
(س ليس تقابل لأنه غير متباين)

(تسمى بَ مسقط ب على (ق) وفق (Δ)).



مثال 3 :

ليكن (ك) ، (كَ) مستوين في الفضاء وليكن (Δ) مستقيما لا يوازي (كَ). لنرفق لكل نقطة ب من (ك) النقطة بَ التي هي نقطة تقاطع (كَ) والمستقيم المرسوم من ب والموازي لـِ (Δ). (الشكل) هذه العملية تعرّف تطبيقا من (ك) نحو (كَ).



إن هذه الأمثلة تعطي فكرة عن تحوّل نقطة إلى نقطة أخرى دون أن يكون هناك معلم. وسنرى فيما بعد أمثلة لتحوّل نقطة تحليليا أو شعاعياً أو إعتماداً على الأعداد المركبة.

1 – التحـويـل النقطـي :

تعريـف :

نسمي تحويلاً نقطياً كل تطبيق لمجموعة نقطية **س** في مجموعة نقطية **ع**.

نرمز له بأحد الرموز : ت أو ل أو ط ....

وغالباً تكون المجموعتان نقاط المستوي (π) أو جزء منها. هذا التطبيق يرفق بكل نقطة ن من المجموعة **س** نقطة أخرى من المجموعة **ع** فنكتب :

ت: س ← ع

ن ↤ ت(ن) = نَ

تُسّمى النقطة نَ مُحَوِّلة النقطة ن وفق التحويل ت. ويمكننا إستعمال كل خواص التطبيقات في التحويلات النقطية.

2 – التحويل المطابق (الحيادي) :

نقول عن تحويل نقطي ت: س ↤س أنه حيادي (مطابق) إذا إنطبقت كل نقطة على محولتها

أي :∀ ن ∋ **س** : ت(ن) = ن

ونرمز له بالرمز : $1_{س}$ أو $م_{س}$

3– التحويل التقابلي :

نقول عن تحويل نقطي ت : **س** ← **ع** أنه متباين إذا وفقط إذا كان :

$\forall ن_1 \in س$ ، $\forall ن_2 \in س$: $ن_1 \neq ن_2 \Leftarrow ت(ن_1) \neq ت(ن_2)$

وإنه غامر إذا وفقط إذا كان :

∀ نَ ∋ **ع** ، E ن ∋ **س** : ت(ن) = نَ

ونقول عن التحويل ت أنه تقابلي إذا كان متبايناً وغامراً.

أي مقابل كل نقطة نَ من **ع** توجد نقطة وحيدة ن من **س** بحيث : نَ = ت(ن).

* **نتيجة :**

إذا كان التحويل النقطي ت تقابلاً بين **س** ، **ع** فإنه يقبل تحويلاً عكسياً (نرمز له ت^{-1}) من **ع** إلى **س** حيث:

$$\boxed{\text{نَ} = \text{ت(ن)} \Leftrightarrow \text{ن} = \text{ت}^{-1}\text{(نَ)}}$$

4 – تركيب التحويلات النقطية :

لتكن المجموعات النقطية : **س**، **ع** ، **ص**.

وليكن التحويلان : ت_1 : **س** ← **ع** ، ت_2 : **ع** ← **ص**

نعرف تحويلاً نقطياً من المجموعة **س** نحو المجموعة **ص** ندعوه مركب التحويلين ت_1 ، ت_2 بهذا الترتيب : $\text{ت}_2 \circ \text{ت}_1$. (لاحظ الشكل)

$$\begin{tikzcd} \text{س} \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\text{ت}_2 \circ \text{ت}_1"'] & \text{ع} \arrow[r] & \text{ص} \end{tikzcd}$$

$\text{ت}_2 \circ \text{ت}_1$: **س**← **ص**

$$\text{ن} \mapsto (\text{ت}_2 \circ \text{ت}_1)\text{(ن)} = \text{ت}_2\,[\text{ت}_1\text{(ن)}\,]$$

5 – التحويل التضامني :

ليكن التحويل النقطي ت : **س**← **س**

نقول أن التحويل ت تضامني إذا وفقط إذا كان : ت تقابل وَ ت = ت^{-1}

ملاحظة :

$$\text{ت} = \text{ت}^{-1} \Leftrightarrow \text{ت} \circ \text{ت} = \text{ت}^{-1} \circ \text{ت} \Leftrightarrow \text{ت} \circ \text{ت} = 1_{\text{س}}.$$

أي أن التحويل النقطي ت يكون تضامنياً إذا وفقط إذا كان : $\text{ت} \circ \text{ت} = 1_{\text{س}}$

نتيجة : مجموعة التحويلات التقابلية المزوّدة بعملية التركيب (o) لها بنية زمرة . لأن عملية التركيب (o) داخلية ، تقبل عنصراً حيادياً هو $1_{س}$ ولكل تقابل نظير بالنسبة للعملية (o) هو تحويله العكسي بالإضافة إلى أن عملية التركيب تجميعية.

6 – النقط الصامدة :

ليكن التحويل النقطي ت : **س**← **س**.

تعريف :

نقول عن نقطة أ (أ ∋ **س**) أنها صامدة وفق التحويل ت إذا أنطبقت على محولتها
أي : ت(أ) = أ.

* لاحظ أن التحويل المطابق هو تحويل جميع نقاطه صامدة .

7 – العبارة التحليلية لتحويل نقطي :

ليكن (π) المستوي الإقليدي مزّوداً بمعلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$)

وليكن التحويل النقطي ت : (π)←(π)/ ن (س ، ع) ↤ نَ (سَ ، عَ)

حيث : $\begin{cases} سَ = تا\left(س ، ع\right) \\ عَ = ها\left(س ، ع\right) \end{cases}$

نسمي هاتين العبارتين " العبارة التحليلية للتحويل ت ".

8 – التحويل التآلفي :

ليكن التحويل ت : (π) ← (π) /ن (س،ع) ↤ نَ(سَ ، عَ)

نقول أن التحويل ت تآلفياً إذا كانت عبارته التحليلية معرفة بالشكل :

$$\begin{cases} سَ = أ\, س + ب\, ع + جـ \\ عَ = \overleftarrow{أ}\, س + بَ\, ع + جـَ \end{cases}$$

حيث أ ، أَ، ب ، بَ ، جـ ، جـَ أعداد حقيقية .

9 - أمثلة :

مثال 1 :

ليكن التحويل ت : $(\pi) \leftarrow (\pi)$

$$\text{ن(س، ع)} \mapsto \text{نَ (سَ ، عَ)} \ / \ \left\{\begin{array}{l} \text{سَ} = 2\text{س} \\ \text{عَ} = 2\text{ع} \end{array}\right. \qquad (*)$$

1 – عين النقاط الصامدة بالتحويل ت.

2 – بين أن تا تقابل. عرف ت$^{-1}$. هل هو تضامني ؟

الحل :

1 – تكون النقطة ن$_0$(س$_0$ ع$_0$) صامدة بالتحويل ت إذا وفقط إذا كان :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{سَ}_0 = \text{س}_0 \\ \text{عَ}_0 = \text{ع}_0 \end{array}\right. \text{ أي } \left\{\begin{array}{l} \text{س}_0 = 2\text{س}_0 \\ \text{ع}_0 = 2\text{ع}_0 \end{array}\right. \text{ أي } \left\{\begin{array}{l} \text{س}_0 = 0 \\ \text{ع}_0 = 0 \end{array}\right.$$

فالنقطة ن$_0$(0 ، 0)، وهي المبدأ، صامدة بالتحويل ت

2 – حتى يكون ت تقابلًا يجب أن توجد لكل نقطة نَ (سَ ، عَ) سابقة وحيدة ن (س،ع) وهذا معناه للجملة(*) حل وحيد . وذلك يكون عندما محددها (م) غير معدوم.

$$\text{م} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$. فالتحويل ت تقابلي

لإيجاد التحويل العكسي نحسب س ، ع بدلالة سَ ، عَ فنجد :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{س} = \frac{1}{2}\text{سَ} \\ \text{ع} = \frac{1}{2}\text{عَ} \end{array}\right.$$

ويمكن إستبدال الرموز حفاظاً على الكتابة المألوفة فنكتب :

ت$^{-1}$: $(\pi) \leftarrow (\pi)$

ن (س، ع) ↤ نَ (سَ ، عَ) / $\begin{cases} سَ = \frac{1}{2}س \\ عَ = \frac{1}{2}ع \end{cases}$

نلاحظ أن : ت ≠ $ت^{-1}$ فالتحويل ت ليس تضامنياً.

مثال 2 : أعد الأسئلة السابقة من أجل التحويل النقطي :

ت : ن (س، ع) ↤ نَ (سَ ، عَ) $\begin{cases} سَ = س \\ عَ = -ع \end{cases}$

10 - تتمات :

*** تعيين التحويل النقطي :**

إن تعييـن التحويل النقطي يعني معرفة كل من مجموعة المنطلق ومجموعة الوصول وتحديد محوّلة كل نقطة وفق هذا التحويل. وذلك يتم بعدة طرق : إما تحليليا أو شعاعياً أو هندسيا أو بالأعداد المركبة .

فمـثلاً : لإيجـاد محوّلـة نقطة وفق تحويل نقطي ت تحليليا نعوض إحداثيي النقطة في عبارتي التحويل. كما يوضّح المثال الآتي :

ت : ن (س ، ع) ↤ نَ (سَ ، عَ) / $\begin{cases} سَ = 3س - 4ع \\ عَ = س + 2 \end{cases}$

ما هي محولة النقطة ن (1 ، 2) وفق التحويل ت.

بوضع س = 1 ، ع = 2 في عبارتي التحويل ت نجد أن : سَ = − 5 ، عَ = 3

إذن ت : ن (1 ، 2)↤ نَ (−5 ،3) وهكذا

أما لإيجاد معادلة محوّل منحني (ي) الممثل بالمعادلة ع = تا(س)،

فعلينـا حسـاب س ، ع بدلالـة سَ ، عَ من عبارتـي الـتحويل ثـم نعوّض فـي معادلة المنحني (ي) فنجد معادلة (يَ) محول (ي) بالتحويل المفروض.

مثال : ليكن التحويل ت : $(\pi) \longrightarrow (\pi)$

ن(س ، ع) ⟵ نَ (سَ ، عَ) / $\begin{cases} \text{سَ} = \text{س} + 2 \\ \text{عَ} = \text{ع} + 2 \end{cases}$

أوجد محوّل (صورة) المستقيم (Δ) : ع = 2س + 1 بالتحويل ت

الحل :

نحسب س ، ع بدلالة سَ ، عَ وذلك إعتماداً على عبارتي التحويل ت فنجد :

$\begin{cases} \text{س} = \text{سَ} - 2 \\ \text{ع} = \text{عَ} - 2 \end{cases}$

وبالتعويض في معادلة المستقيم (Δ) :

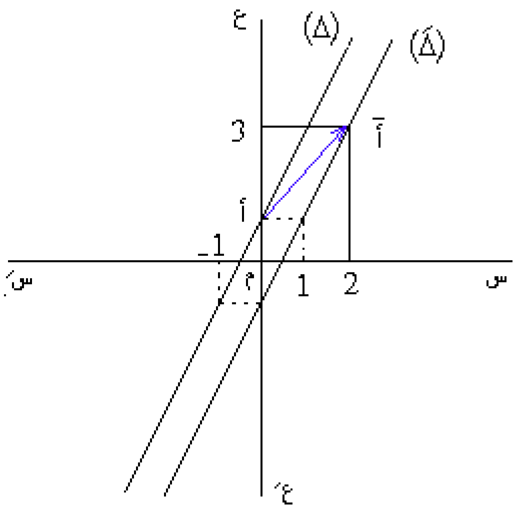
عَ − 2 = 2(سَ − 2) + 1

عَ = 2 سَ − 1. فمحول المستقيم (Δ) بالتحويل ت هو المستقيم :

$(\acute{\Delta})$: عَ = 2سَ − 1.

لاحظ أن النقطة أ (0 ، 1) من المستقيم (Δ) تتحول إلى النقطة أَ(2 ، 3) من المستقيم $(\acute{\Delta})$ وهكذا . . . .

كما يوضح الشكل الموالي :



أما التعيين الشعاعي أو الهندسي لتحويل نقطي فيتم بإيجاد علاقة شعاعية أو خاصة هندسية تربط النقطة ن بالنقطة نَ.

وسنتعرف فيما بعد على كيفية تعيين التحويل النقطي بالأعداد المركبة.

11 – تمارين التصحيح الذاتي :

11 – 1 : ليكن المستوي (π) المزود بمعلم متعامد ومتجانس (م، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$) وليكن التحويل ت :
$(\pi) \leftarrow (\pi)$

$$ن(س ، ع) \mapsto نَ(سَ ، عَ) \;/\; \begin{cases} سَ = 2س + 3ع \\ عَ = 3س + 10ع \end{cases}$$

أولاً : بيّن أن ت تقابل . عين تحويله العكسي $ت^{-1}$.

ثانياً : أوجد مجموعة النقاط الصامدة بالتحويل ت.

ثالثاً : برهن أن مجموعة النقاط ن بحيث تكون النقط : ن ، م ، نَ على إستقامة واحدة هي إتحاد مستقيمين يطلب تحديدهما

11 – 2 – بفرض ها تحويل نقطي تضامني، ت تحويل يقبل تحويلاً عكسيا $ت^{-1}$. برهن أن التحويل : ل = $ت^{-1}$ o ها o ت تضامنيا.

11 – 3 – ليكن المستوي (π) المزود بمعلم متعامد ومتجانس (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$) . ولنرفق بكل عدد حقيقي ك التحويل $ت_{ك}$: $(\pi) \leftarrow (\pi)$

$$ن(س ، ع) \mapsto نَ(سَ ، عَ) \;/\; \begin{cases} سَ = -ك س + 2(ك + 1) \\ عَ = ك ع \end{cases}$$

أولاً: عين مجموعة الأعداد ك التي يكون من أجلها التحويل $ت_{ك}$ تقابلياً

ثانياً : أدرس حسب قيم ك مجموعة النقط الصامدة وفق التحويل $ت_{ك}$

ثالثاً : عرف التحويل : $ت_1$ o $ت_2$

12 – أجوبة التصحيح الذاتي :

12 – 1 – أولاً : يكون التحويل ت تقابلاً إذا وفقط إذا كان للجملة حل وحيد وذلك مهما يكن سَ ، عَ.
لذا نحسب محدد الجملة.

$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$. فالتحويل ت تقابل.

لإيجاد ت^{-1} نحسب س ، ع بدلالة سَ ، عَ من الجملة :

$$\begin{cases} 2\,\text{س} + 3\,\text{ع} = \text{س}' \\ 3\,\text{س} + 10\,\text{ع} = \text{ع}' \end{cases}$$

وإعتماداً على طريقة المحددات لحل جملة معادلتين خطيتين من الدرجة الأولى نجد: س =

$$\frac{\begin{vmatrix} \text{س}' & 3 \\ \text{ع}' & 10 \end{vmatrix}}{11} = \frac{10\,\text{س}' - 3\,\text{ع}'}{11} = \frac{10}{11}\text{س}' - \frac{3}{11}\text{ع}'.$$

$$\text{ع} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & \text{س}' \\ 3 & \text{ع}' \end{vmatrix}}{11} = \frac{2\,\text{ع}' - 3\,\text{س}'}{11} = -\frac{3}{11}\text{س}' + \frac{2}{11}\text{ع}'$$

إذن ت^{-1} : ن(س ، ع) $\longmapsto$ نَ (سَ ، عَ) / $\begin{cases} \text{س}' = \frac{10}{11}\text{س} - \frac{3}{11}\text{ع}' \\ \text{ع}' = -\frac{3}{11}\text{س} + \frac{2}{11}\text{ع} \end{cases}$

ثانياً : تكون النقطة ن صامدة بالتحويل ت إذا كان : ت (ن) = ن

ت(ن) = ن $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{س}' = \text{س} \\ \text{ع}' = \text{ع} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\text{س} + 3\text{ع} = \text{س} \\ 3\text{س} + 10\text{ع} = \text{ع} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{س} + 3\text{ع} = 0 \\ 3\text{س} + 9\text{ع} = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \text{س} + 3\text{ع} = 0 \\ 3\text{س} + 9\text{ع} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ س + 3 ع = 0.

إذن هناك مستقيم صامد بالتحويل ت هو المستقيم الذي معادلته :

س + 3 ع = 0. أي أن جميع نقاط هذا المستقيم صامدة بالتحويل ت.

ثالثا : تكون النقط : ن ، م ، نَ على إستقامة واحدة إذا كان : $\overleftarrow{\text{م ن}}$ / م نَ

ونعلم أن : $\overrightarrow{\text{م ن}}\begin{pmatrix}\text{س}\\ \text{ع}\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{\text{م نَ}}\begin{pmatrix}\text{سَ}\\ \text{عَ}\end{pmatrix}$

حيث أن : $\overrightarrow{\text{م ن}}$ // $\overrightarrow{\text{م نَ}}$ ⇔ س عَ − سَ ع = 0 (شرط توازي شعاعين)

س عَ − سَ ع = 0 ⇔ س(3س + 10 ع) − (2س + 3ع) ع = 0

⇔ 3س^{2} + 10 س ع − 2 س ع − 3ع^{2} = 0

⇔ 3ع^{2} − 9 س ع − 3 س^{2} + س ع = 0

⇔ 3ع (ع − 3س) + س (ع − 3 س) = 0

⇔ (ع − 3 س) (3ع + س) = 0

(ع −3 س) (3 س+س) = 0 ⇔ { ع − 3س = 0 أو 3ع + س = 0 } وهما معادلتا المستقيمين المطلوبين.

12 − 2 − يكون التحويل ل تضامنياً إذا كان : لoل = 1_{π}

لoل = (ت$^{-1}$ o ها o ت) o (ت$^{-1}$ o ها o ت)

= ت$^{-1}$ o ها o تoت$^{-1}$ o ها o ت

= ت$^{-1}$ o ها o ها o ت

= ت$^{-1}$ o ت (لأن ها تضامني)

ومنه لoل = 1_{π} . فالتحويل ل تضامني.

12 − 3 − أولاً : يكون التحويل ت$_{ك}$ تقابلً إذا وفقط إذا كان للجملة حل وحيد أي إذا كان محددها غير معدوم.

لدينا : $\begin{vmatrix}-\text{ك} & 0\\ 0 & \text{ك}\end{vmatrix} = -\text{ك}^{2}$ ، −ك^{2} ≠ 0 ⇔ ك ≠ 0 .

إذن يكون التحويل ت$_{ك}$ تقابليا إذا وفقط إذا كان ك ∋ ح* .

* ثانياً :

تكون ن (س، ع) صامدة بالتحويل ت$_{ك}$ إذا وفقط إذا كان :

$$\begin{cases} \text{س} = -\text{ك}\ \text{س} + 2\,(\text{ك}+1) \\ \text{ع} = \text{ك}\ \text{ع} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\text{ك}+1)\text{س} - 2(\text{ك}+1) = 0 \\ (\text{ك}-1)\text{ع} = 0 \end{cases} \quad (*)$$

لحل الجملة (*) نحسب المحدد : $\begin{vmatrix} \text{ك}+1 & 0 \\ 0 & \text{ك}-1 \end{vmatrix} = \text{ك}^2 - 1$

نميز ثلاث حالات :

* ك = -1 ، يكون المحدد معدوماً وعندئذ :

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 0\,\text{س} = 0 \\ -2\,\text{ع} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{ع} = 0.$$

فالنقاط الصامدة هي نقاط المستقيم ذي المعادلة : ع = 0 (محور الفواصل)

* ك = 1، يكون المحدد معدوماً عندئذ :

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\,\text{س} - 4 = 0 \\ 0.\text{ع} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{س} = 2$$

فالنقاط الصامدة هي نقاط المستقيم ذي المعادلة : س = 2 .

*ك$\neq 1$ وَ ك $\neq -1$، عندئذ يكون المحدد غير معدوم وعندها تقبل الجملة حلاً وحيداً.

$$\text{س} = \frac{\begin{vmatrix} 2(\text{ك}+1) & 0 \\ 0 & \text{ك}-1 \end{vmatrix}}{\text{ك}^2-1} = \frac{2(\text{ك}^2-1)}{\text{ك}^2-1} = 2$$

$$\text{ع} = \frac{\begin{vmatrix} (\text{ك}+1) & 2(\text{ك}+1) \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{\text{ك}^2-1} = \frac{0}{\text{ك}^2-1} = 0$$

فالنقطة الوحيدة الصامدة هي : ن (2 ، 0).

ثالثاُ :

من أجل ك = 1 فإن :

$$\text{ت}_1 : \text{ن}\,(\text{س} ، \text{ع}) \longmapsto \text{نَ}\,(\text{سَ} ، \text{عَ}) \ / \ \begin{cases} \text{سَ} = -\text{س} + 4 \\ \text{عَ} = \text{ع} \end{cases}$$

نحصل على التحويل المركب : $\text{ت}_1 o \text{ت}_\text{ك}$ إعتماداً على المخطط الآتي :

تك ت_1

$$ن(س، ع) \longrightarrow ن_1(س_1، ع_1) \longrightarrow نَ(سَ، عَ)$$

$$ت_1 o ت_ك$$

$$\begin{cases} سَ = -س_1 + 4 \\ عَ = ع_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} سَ = -[-ك س + 2(ك+1)] + 4 \\ عَ = ك ع \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} سَ = ك س - 2(ك-1) \\ عَ = ك ع \end{cases}$$

إذن : $ت_1 o ت_ك$: ن (س ، ع) $\longmapsto$ نَ (سَ ، عَ) / $\begin{cases} سَ = ك س - 2(ك-1) \\ عَ = ك ع \end{cases}$

تمارين غير محلولة

(1) – نعرّف على ح مجموعة الأعداد الحقيقية العمليتين الداخليتين *، T كما يلي :

$\forall$ (أ ، ب) $\in$ ح^2 : أ * ب = أ + ب + 3 ، أ T ب = أ + ب + 7

1) هل (ح ، *) زمرة تبديلية ؟

2) نعرف التطبيق تا : ح $\longrightarrow$ ح

س $\longmapsto$ تا(س) = 2س – 1.

برهن أن : (ح ، *) ، (ح ، T) متشاكلتان تقابليا.

(2) أ) عين مجموعة قواسم العدد 276.

ب) أوجد كل الثنائيات (أ ، ب) $\in$ ط* × ط* التي تحقق :

م + 3 ق = 270 وَ 10 > ق > 30.

حيث : ق = أ $\wedge$ ب ، م = أ $\vee$ ب

(3) بفرض أ ، ب عددين طبيعين غير معدومين .

عين مجموعة الثنائيات (أ ، ب) التي تحقق :

$$\begin{cases} أ \geq ب \\ أ+ب = 105 \quad \text{حيث : ق = أ} \wedge \text{ب} \quad ، \text{م = أ} \vee \text{ب} \\ م = 12 ق \end{cases}$$

(4) نعتبر المعادلة : 41 س − 27 ع = 1 / (س ، ع)∋ ص^2

أ) بين أن الثنائية (2 ، 3) حلا للمعادلة السابقة.

ب) إستنتج حلاً خاصا للمعادلة : 41 س − 27 ع = 5 (*)

جـ) أعط الحل العام للمعادلة (*).

(5) أكتب الأعداد المركبة الآتية على الشكل الجبري :

$$ص_1 = \frac{ت-4}{-2ت} \qquad ص_2 = \frac{5-3ت}{(4-ت)(1+3ت)} \qquad ص_3 = [5 \quad \pi].$$

(6) حل في ﻙ مجموعة الأعداد المركبة المعادلات الآتية :

* ص^4 + ص^2 + 1 = 0
* (ص + 1)^2 + ت(ص + 2) ^{2} = 0
* ص^2 − (3 + 2 ت) ص + 5 + ت = 0 (ت^2 = −1)

(7) ﻙ مجموعة الأعداد المركبة ، نعتبر كثير الحدود :

ك (ص) = ص^3 − 10 ت ص^2 − 4 (3 −4 ت) ص + 40 (4 + 3 ت)

1) حل المعادلة : ك (ص) = 0 إذا علمت أنها تقبل جذراً تخيليا صرفاً ص$_0$.

2) أحسب الجذرين الآخرين ص$_1$ ، ص$_2$ لهذه المعادلة (يشير ص$_1$ إلى الجذر الذي جزؤه الحقيقي موجب).

3) بفرض النقط : ن$_0$ ، ن$_1$ ، ن$_2$ صور الأعداد المركبة ص$_0$ ، ص$_1$ ، ص$_2$ في المستوي .
أحسب مساحة المثلث ن$_0$ ن$_1$ ن$_2$.

(8) أحسب النهايات الآتية :

* $$\lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{س+1} - \sqrt{س^2+س+1}}{س}$$

* $\lim\limits_{س \to -3} \frac{1-3س}{(س+3)^2}$
* $\lim\limits_{س \to 4} \frac{2-\sqrt{س}}{س-4}$
* $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\text{تجب } س} - \text{ظل } س \right)$

(9) لتكن الدالة العددية تا المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} تا(س) = س + \frac{\sqrt{س^2}}{س} \text{ ، } س \neq 0 \\ تا(0) = 1 \end{cases}$$

1) أدرس إستمرار الدالة تا على ح.

2) هل الدالة تا قابلة للإشتقاق عند النقطة $س_0 = 0$.

(10) أدرس تغيرات الدوال العددية الآتية (مجموعة التعريف، النهايات، المشتق، جدول التغيرات ، نقط التقاطع مع حاملي المحوريين).

$تا(س) = \frac{س^2+2س+1}{س-1}$ ، $ها(س) = \frac{س^2}{|س|+2}$

$لا(س) = \frac{(س-2)^2}{س^2+2}$ ، $عا(س) = 5س + 3\left(\sqrt{س^2-1}-1\right)$

$ما(س) = \frac{2س}{\sqrt{س^2-1}}$.

(11) أ) أثبت أنه : $\forall$ ن $\in$ ط : $3^{2ن+3} + 2^{ن+3}$ يقبل القسمة على 7

ب) عين باقي قسمة العدد 19^{52} على 8

جـ) عين باقي قسمة العدد $(7856)^{6432}$ على 11

(12) نعتبر المجموعة $\frac{ص}{5ص}$.

1) أنشئ جدولي الجمع والضرب في هذه المجموعة

2) حل في هذه المجموعة المعادلة : $\dot{2} + س = \dot{1}$

3) حل في هذه المجموعة المعادلة : $\dot{3}\text{س} = \dot{2}$. (س مجهول)

4) حل في المجموعة $\frac{\text{ص}}{5\text{ص}} \times \frac{\text{ص}}{5\text{ص}}$ الجملة :
$$\begin{cases} \dot{2}\text{س} + \dot{3}\text{ع} = \dot{2} \\ \dot{1}\text{س} + \dot{2}\text{ع} = \dot{4} \end{cases}$$

(13) بفرض $\alpha \in$ ح$^{*}_{+}$ ، نعتبر الدالة تا$_\alpha$ للمتغير الحقيقي س حيث :

$$\text{تا}_\alpha(\text{س}) = \frac{\text{س}^2 + (\alpha + 1)\text{س} + 2\alpha}{\text{س} + 1}$$

1) أدرس تغيرات الدالة تا$_\alpha$ حسب قيم الوسيط α

2) أثبت أن منحنى الدالة تا$_\alpha$ يقبل خطا مقارباً مائلاً (Δ_α) معادلته ع = س + α

3) برهن أن المنحنيات (ي$_\alpha$) الممثلة للدوال تا$_\alpha$ تمر جميعها من نقطة ثابتةω يطلب تعيين إحداثييها.

(14) ليكن (π) المستوي الإقليدي المزود بمعلم متعامد ومتجانس (م ، $\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ي}}$) ولتكن النقطتان : أ(0 ، 2) ، ب (2 ، -4) من هذا المستوي.

1) بفرض ن نقطة إختيارية على محور الفواصل، عين فاصلة النقطة ن حتى يكون المثلث أ ن ب قائماً في النقطة ن.

2) بفرض ن نقطة إختيارية من المستوي، عين مجموعتي النقط :

س = { ن : المثلث أ ن ب قائم في ن }

ع$_{ط}$ = { هـ : $\overleftarrow{\text{أب}}$. $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ = 2 ط }

(15) ليكن التحويل ت : $(\pi) \longrightarrow (\pi)$

ن(س،ع) $\longmapsto$ نَ (سَ ، عَ)

حيث :
$$\begin{cases} \text{سَ} = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{س} - \frac{1}{2}\text{ع} \\ \text{عَ} = \frac{1}{2}\text{س} + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{ع} \end{cases}$$

1) عين مجموعة النقاط الصامدة بالتحويل ت

2) هل ت تقابل أم لا، عين تحويله العكسي في حالة الإيجاب

3) أعط معادلتي صورتي المستقيم (Δ) : س + ع + 1 = 0

والدائرة (د) : س^2+ع^2=1 بواسطة التحويل ت